ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТРИКИ БОЛЬШИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Ядыкин И.Б
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
Jad@ipu.ru

Аннотация. В статье рассматриваются методы и модели крупномасштабных динамических сетей, основанных на использовании графов, заданных уравнениями состояния. Предложены структурные и спектральные методы энергетических метрик этих моделей в различных канонических формах.

Ключевые слова: ориентированные графы, уравнения Ляпунова и Сильвестра, грамианы, энергетические метрики.

Введение

Первые спектральные разложения грамианов для линейных непрерывных и дискретных систем с простым спектром были получены в работе [1] путем спектрального разложения интегрального представления решения уравнений Ляпунова или Сильвестра. Хорошо известно, что грамианы являются решениями уравнений Сильвестра и Ляпунова, которым посвящено громадное число научных работ, среди которых отметим [2-5]. Эти уравнения играют также фундаментальную роль в теории управления. В последние годы возник интерес к развитию методов вычислений различных энергетических показателей для анализа устойчивости и степени управляемости, достижимости и наблюдаемости этих систем. Такие показатели для линейных устойчивых систем и неустойчивых линейных систем были предложены в ряде работ[6-15]. Упрощенные модели для больших сетей на основе выходных грамианов управляемости, позволяющие вычислять энергетические показатели, были предложены в [12]. Важная задача оптимального размещения датчиков и исполнительных устройств на основе различных энергетических функционалов, в том числе инвариантных эллипсоидов, рассматривалась в [13-15]. В монографии [12] сформулирован общий подход к решению задачи оптимального размещения датчиков и исполнительных механизмов для многосвязных систем управления, который основан на декомпозиции системы на устойчивую и неустойчивую подсистемы. Показано, что степень управляемости системы определяется на основе энергетических метрик, основанных на использовании конечных и бесконечных грамианах управляемости. В [10] предложен метод оптимального размещения виртуальной инерции на графе энергетической системы, основанный на использовании энергетических метрик когерентности генераторов и квадрата H_2 –нормы системы, которая задана стандартной динамической моделью в пространстве состояний.

1. Обсуждение результатов и постановка задачи

В дальнейшем мы будем рассматривать ориентированный граф G , образованный множеством узлов E и множеством ребер Q. Хорошо известно, что для описания модели графа можно использовать линейную динамическую модель графа со стандартным описпнием в виде (A,B,C) представления в пространстве состояний. В качестве такой модели рассмотрим устойчивую непрерывную стационарную MIMO LTI линейную стационарную непрерывную динамическую систему с многими входами и многими выходами вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = 0, \quad (1)$$
$$y(t) = Cx(t),$$

где $x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, y(t) \in R^m$. Наряду с MIMO LTI системами вида (1) будем рассматривать также большие динамические сети, которые можно описать уравнениями вида (1), в которых $A -$ матрица Лапласиана, $B -$ матрица управляющих входов, С-матрица измерямых выходов, причем порядок матрицы динамики графа является конечным положительным числом [19].

Рассмотрим уравнения Ляпунова для непрерывной стационарной MIMO LTI в диагональной канонической форме

$$AP + PA^T = -BB^T,$$
$$A^T P + PA = -C^T C.$$

$$x_d = Tx, \qquad \dot{x}_d = A_d x_d + B_d u, \qquad y_d = C_d x_d,$$
$$A_d = TAT^{-1}, \qquad B_d = TB, \qquad C_d = CT^{-1} \qquad ,$$

или

$$\mathrm{A} = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n] \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{bmatrix},$$

где матрица T составлена из правых собственных векторов u_i, а матрица T^{-1} - из левых собственных векторов v_i^*, соответствующих собственному числу s_i.Введем обозначения

$$\beta_{ij} = e_i TBB^T T^* e_j^T, \qquad \gamma_{ij} = e_i (CT^{-1})^* CT^{-1} e_j^T.$$

Рассмотрим далее SISO LTI системы в канонической форме управляемости [9]

$$x_c(t) = R_c^F x(t). \dot{x}_c(t) = A_c^F x_c(t) + b_{\square}^F u(t), x_c(0) = 0, \tag{2}$$
$$y_c(t) = c_c^F x_c(t),$$

$$A_c^F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad b^F = [0 \quad 0 \quad .. \quad 0 \quad 1]^{\mathrm{T}},$$

$$c^F = [\xi_0 \quad \xi_1 \quad .. \quad \xi_{n-2} \quad \xi_{n-1}].$$

Справедливы следующие соотношения [15]

$$R_c^F A (R_c^F)^{-1} = A_c^F, R_c^F b = b_\gamma^F, c(R_c^F)^{-1} = c_{\square}^F,$$
$$P_c = (R_c^F)^{-1} P_c^F ((R_c^F)^{-1})^T,$$

где матрица P_c^F является решением соответствующего уравнения Ляпунова. В отношение систем (1) и (2) мы будем предполагать выполненными различные структурные условия устойчивости, управляемости, наблюдаемости и свойств спектра матрицы динамики. В работе [26] было получено следующее спектральное разложение грамиана управляемости

$$P_c^F = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} 1_{j+1\eta+1}.$$

Рассмотрим далее канал SISO (с одним входом и многими выходами) LTI линейной системы в канонической форме наблюдаемости [9]. В этом случае справедливы формулы

$$x_o(t) = R_o^F x(t),$$
$$\dot{x}_o(t) = A_o^F x_o(t) + b_o^F u(t), \quad x_o(0) = 0,$$
$$y_o^F(t) = c_o^F x_o(t).$$

В соответствии с принципом дуальности мы получим выражения [26]

$$P_o^F = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} 1_{j+1\eta+1}.$$

Кроме того,

$$P_o = (R_o^F)^T P_o^F R_o^F.$$

Назовем матрицей Сяо (Zero plaid structure) матрицу вида [23]

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & -y_2 & 0 & y_3 \\ 0 & y_2 & 0 & -y_3 & 0 \\ -y_2 & 0 & y_3 & 0 & \dots \\ 0 & -y_3 & 0 & \dots & 0 \\ y_3 & 0 & \dots & 0 & y_n \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Соответствующие элементы матрицы вычисляются по формулам

$$y_{j\eta} = \begin{cases} 0, \text{ если } j+\eta = 2k+1, \quad k = 1,2 \dots n; \\ (-1)^{\frac{j-\eta}{2}} y_i, \text{ если } j+\eta = 2k, \quad i,k = 1,2 \dots n. \end{cases} \quad (4)$$

Целью доклада является разработка общего подхода и исследование свойств спектральных разложений решений дифференциальных и алгебраических уравнений Сильвестра и Ляпунова в форме произведений Адамара. *Другой целью* доклада является получение спектральных разложений следующих энергетических метрик [6,8-19]:

1) Объема эллипсоидов притяжения $Vol\ \mathcal{E}_x, Vol\ \mathcal{E}_y$. Эта метрика характеризует объем подмножества пространства состояний, достижимого из начала координат при фиксированном количестве энергии управления, являющейся функцией определителя грамиана управляемости,
2) Следов матрицы грамиана управляемости tr P_c. Эта метрика характеризует меру энергии, которая обратно пропорциональна средней энергии, необходимой для управления системой в различных направлениях пространства состояний.
3) Следов обратной матрицы грамиана управляемости tr ${P_c}^{-1}$. Эта метрика характеризует меру энергии, которая пропорциональна средней энергии, необходимой для управления системой в различных направлениях пространства состояний.
4) Входной и выходной энергии системы E_{in}, E_{out}.
5) Индексов центральности энергетических метрик управляемости отдельных мод непрерывных многосвязных стационарных систем$J_{CE,}J_{CE_i}$.
6) Средней минимальной энергии E_{avmin}.

2. Основные результаты

Спектральные разложения грамианов позволяют представить матрицу грамиана в виде суммы слагаемых, содержащих кратные суммы суммирования по различным индексам. При этом роль индексов может быть различной. Отдельные индексы играют роль ведущих, в то время как другие являются ведомыми индексами. Распределение ролей индексов определяется
спецификой прикладных задач мониторинга состояния и управления. Кроме того, вычисления в действительной или комплексной области требуют различного подхода к выбору метода и алгоритма вычисления или анализа свойств грамианов. Существуют приложения, в которых возможно использовать комплексные матрицы решений уравнений Ляпунова

$$A^T P_i + P_i A = -R_i^* Q,$$

$$AP_i + P_i A^T = -R_i^* Q,$$

$$A^T P_{ij} + P_{ij} A = -R_i^* Q.$$

$$AP_{ij} + P_{ij} A^T = -R_i^* Q R_j.$$

Назовем эти уравнения модальными уравнениями Ляпунова второго типа

Теорема 1.

Рассмотрим модальные уравнения Ляпунова вида второго типа для непрерывной стационарной MIMO LTI системы в диагональной канонической форме [1]

$$A_d P_{cij} + P_{cij} A_d^* = -\beta_{ij} e_i e_j^T, \quad (5)$$

$$A_d P_{ci} + P_{ci} A_d^* = -\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} e_i e_j^T, \quad (6)$$

или

$$A_d P_{oij} + P_{oij} A_d^* = -\gamma_{ij} e_i e_j^T, \quad (7)$$

$$A_d P_{oi} + P_{oi} A_d^* = -\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} e_i e_j^T. \quad (8)$$

Предположим, что система устойчива, имеет простой спектр. Тогда грамианы управляемости и наблюдаемости существуют, единственны и могут быть представлены в виде произведений Адамара

$$P_c = \Omega_c \circ \Psi_c, \quad (9)$$

$$P_o = \Omega_o \circ \Psi_o, \quad (10)$$

$$\Psi_c = [\beta_{ij}]_{n\times n}, \Omega_c = \left[-\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j}\right]_{n\times n}, \Psi_o = [\gamma_{ij}]_{n\times n}, \Omega_o = \left[-\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j}\right]_{n\times n},$$

$$P_{cij} = \Omega_c \circ \Psi_{cij}, \Psi_{cij} = e_i [\beta_{ij}]_{n\times n} e_j^T, P_{ci} = \sum_{j=1}^{n} \Omega_c \circ \Psi_{cij}, \quad (11)$$

$$P_{oij} = \Omega_o \circ \Psi_{oij}, \Psi_{oij} = e_i [\gamma_{ij}]_{n\times n} e_j^T, P_{oi} = \sum_{j=1}^{n} \Omega_o \circ \Psi_{oij}. \quad (12)$$

Если, кроме того, пара (A,B) управляема, а пара (A,C) наблюдаема, то матрицы мультипликаторов Ω_c и Ω_o являются определенно положительными, их диагональные элементы и следы являются положительными числами. Эрмитовы компоненты грамианов имеют форму [2]

$$P_c^H = \frac{1}{2}(P_c + P_c^*), \quad P_o^H = \frac{1}{2}(P_o + P_o^*).$$

Для грамианов и субграмианов управляемости и наблюдаемости в форме произведений Адамара справедливы формулы

$$P_{cj\eta}^H = \Omega_{cj\eta}^H \circ \Psi_{cj\eta}^H, \quad P_{oj\eta}^H = \Omega_{oj\eta}^H \circ \Psi_{oj\eta}^H, \quad (13)$$

$$\Omega_{cj\eta}^H = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} Re\left[-\frac{1}{\lambda_i + \lambda_\eta}\right] e_{j+1} e_{\eta+1}^T, \quad (14)$$

$$\Psi_{cj\eta}^H = \frac{1}{2}\left(\beta_{j\eta} + \beta_{j\eta}{}^*\right), \quad (15)$$

$$\Omega_{oj\eta}^H = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} Re\left[-\frac{1}{\lambda_i + \lambda_\eta}\right] e_{j+1} e_{\eta+1}^T, \quad (16)$$

$$\Psi_{oj\eta}^H = \frac{1}{2}\left(\gamma_{j\eta} + \gamma_{j\eta}{}^*\right), \quad (17)$$

$$P_c^H = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\eta=1}^{n} P_{cj\eta}^H, \quad P_o^H = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\eta=1}^{n} P_{oj\eta}^H. \quad (18)$$

Следствие 1.

Рассмотрим уравнения Ляпунова для непрерывной стационарной SISO LTI системы в канонических формах управляемости и наблюдаемости. Грамианы управляемости и наблюдаемости для уравнений состояния в канонических формах управляемости и наблюдаемости являются матрицами Сяо, которые являются инвариантами при преобразовании подобия. Матрица Сяо положительно определена. Формулы для вычисления грамианов имеют вид

$$P_c = \widetilde{\Omega}_c \circ \widetilde{\Psi}_c, \qquad P_o = \widetilde{\Omega}_o \circ \widetilde{\Psi}_o, \quad (19)$$

$$\widetilde{\Omega}_c = \widetilde{\Omega}_o = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\prod_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1,}^{n}(-s_k - s_\lambda)} 1_{j+1\eta+1}.$$

Их можно переписать в виде

$$P_c = \widetilde{\Omega}_c \circ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ..1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & ..1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & ..1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & ..1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & ..1 \end{bmatrix}, \quad P_o = \widetilde{\Omega}_o \circ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ..1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & ..1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & ..1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & ..1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & ..1 \end{bmatrix}$$

Теорема 2.

Рассмотрим спектральные разложения решений уравнений линейных стационарных MIMO LTI систем. Предположим, что система устойчива, матрицы A, B, C являются вещественными, матрица A имеет простой спектр, пара (A, B) управляема, пара (A, C) наблюдаема. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Спектральные разложения ее грамианов управляемости и наблюдаемости и субграмианов управляемости или наблюдаемости в форме произведений Адамара для случая парного спектра матрицы динамики имеют вид

$$P_{\boldsymbol{cj\eta}} = \widetilde{\Omega}_{cj\eta} \circ \Psi_{cj\eta}, \Psi_{cj\eta} = A_j BB^T (A_\eta)^T \quad (20)$$

$$\widetilde{\Omega}_c = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \widetilde{\Omega}_{cj\eta} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \omega(n, \lambda_k, \lambda_\rho, j, \eta) e_{j+1} e_{\eta+1}^T \quad (21)$$

$$\omega(n, \lambda_k, \lambda_\rho, j, \eta) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\rho=1}^{n} \frac{-1}{\lambda_\rho + \lambda_k} \frac{\lambda_k^j \lambda_\rho{}^\eta}{\dot{N}(\lambda_k) \dot{N}(\lambda_\rho)}. \quad (22)$$

$$e_\nu A_j BB^T (A_\eta)^T e_\mu^T = \left[\beta_{\nu\mu}^{(j\eta)}\right]_{n \times n}, \quad e_\nu A_j^T C^T C A_\eta e_\mu^T = \left[\gamma_{\nu\mu}^{(j\eta)}\right]_{n \times n},$$

$$\Psi_{cj\eta} = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \beta_{\nu\mu}^{(j\eta)} e_\nu e_\mu^T. \quad (23)$$

$$P_{\boldsymbol{c}} = \widetilde{\Omega}_c \circ \Psi_c, \ \ \Psi_c = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \beta_{\nu\mu}^{(j\eta)} e_\nu e_\mu^T \quad (24)$$

2. Для случая разложения грамиана управляемости по простому спектру матрицы динамики в форме произведений Адамара, получим те же формулы (20) – (24), за исключением формул матрицы мультипликатора $\widetilde{\Omega}_c$, которая принимает вид

$$\widetilde{\Omega}_c = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \widetilde{\Omega}_{cj\eta} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \omega(\lambda_k, -\lambda_k, j, \eta) e_{j+1} e_{\eta+1}^T \quad (25)$$

$$\omega(\lambda_k, -\lambda_k, j, \eta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^j (-\lambda_k)^\eta}{\dot{N}(\lambda_k) N(-\lambda_k)}. \quad (26)$$

3. Точно такие же формулы как (20) – (24), будут справедливы для грамианов наблюдаемости в форме произведений Адамара. Изменятся только формулы для матриц Ψ_o

$$P_{\boldsymbol{o}} = \widetilde{\Omega}_c \circ \Psi_o, \ \ \Psi_o = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \gamma_{\nu\mu}^{(j\eta)} e_\nu e_\mu^T. \quad (27)$$

4. Эрмитова компонента грамианов управляемости и наблюдаемости имеет форму [2]

$$P_c^H = \frac{1}{2}(P_{\boldsymbol{c}} + P_c^*), \quad P_o^H = \frac{1}{2}(P_{\boldsymbol{o}} + P_o^*), \quad (28)$$

$$P_{cj\eta}^H = \frac{1}{2}\left(P_{\boldsymbol{cj\eta}} + P_{cj\eta}^*\right), \quad P_{oj\eta}^H = \frac{1}{2}\left(P_{\boldsymbol{oj\eta}} + P_{oj\eta}^*\right). \quad (29)$$

Спектральные разложения эрмитовых компонент грамианов управляемости и наблюдаемости имеют форму матриц Адамара вида

$$P_{cj\eta}^H = \Omega_{\boldsymbol{cj\eta}}^H \circ \Psi_{\boldsymbol{cj\eta}}^H, \ \ P_{oj\eta}^H = \Omega_{\boldsymbol{oj\eta}}^H \circ \Psi_{\boldsymbol{oj\eta}}^H, \quad (30)$$

$$\Omega_{\boldsymbol{cj\eta}}^H = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} Re[\omega(n, \lambda_k, \lambda_\rho, j, \eta)] e_{j+1} e_{\eta+1}^T = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} Re[\omega(n, \lambda_k, -\lambda_k, j, \eta)] e_{j+1} e_{\eta+1}^T, \quad (31)$$

$$\Psi_{\boldsymbol{cj\eta}}^H = \frac{1}{2}\left(A_j BB^T A_\eta^T + A_\eta BB^T A_j^T\right), \quad (32)$$

$$\Omega_{\boldsymbol{oj\eta}}^H = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} Re[\omega(n, \lambda_k, \lambda_\rho, j, \eta)] e_{j+1} e_{\eta+1}^T, \quad (33)$$

$$\Psi_{\boldsymbol{oj\eta}}^H = \frac{1}{2}\left(A_j C^T C A_\eta^T + A_\eta C^T C A_j^T\right), \quad (34)$$

$$P_c^H = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\eta=1}^{n} P_{cj\eta}^H, \quad P_o^H = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\eta=1}^{n} P_{oj\eta}^H. \quad (35)$$

Матрицы мультипликаторов во всех разложениях грамианов являются матрицами Сяо.

2.1. Свойства матриц мультипликаторов

Матрицы мультипликаторов возникают естественным образом при рассмотрении произведений Адамара и наиболее простые представления этих матриц, как показано выше, появляются при использовании канонических представлений в форме управляемости и наблюдаемости. В первую очередь при описании матриц следует выделить значимые и нулевые элементы. Кроме того, для тех и других имеет место свойство периодичности структуры, что позволяет отнести эти матрицы к классу псевдоганкелевых матриц. Значимые элементы всегда появляются на месте главных и побочных диагоналей в том случае, когда сумма индексов их строки и столбца является четным числом. В свою очередь, нулевые элементы всегда появляются в главных и побочных диагоналях в том случае, когда сумма индексов их строки и столбца является нечетным числом. Это свойство связано со свойствами решений уравнений Ляпунова в том случае, когда уравнение состояния динамической системы представлено в канонических формах управляемости и наблюдаемости [26].Матрицы мультипликаторов, состоящих из значимых и нулевых элементов, являются симметричными матрицами, однако вторые являются симметричными не только относительно главной, но и относительно побочной диагонали. Преобразование Адамара позволяет разделить скалярную и матричную части спектральных разложений грамианов, в которых скалярная часть связана с матрицей мультипликаторов, а матричная часть связана с матрицами разложения резольвенты матрицы динамики в ряд Фаддеева – Леверье и преобразованными матрицами правых частей уравнений Ляпунова. Важно отметить, что использование канонических преобразований всех видов позволило представить матричную часть произведения Адамара в виде суммы произведений единичных векторов. Важным свойством мультипликаторов SISO LTI систем в канонических формах управляемости и наблюдаемости является их положительная определенность, следствием которой является положительность диагональных элементов и следа соответствующих грамианов. Их элементы зависят только от собственных чисел матрицы динамики и ее характеристического многочлена, которые не зависят от преобразований подобия и, следовательно являются инвариантами при этих преобразованиях. В отличие от матриц мультипликаторов SISO LTI систем, матричная часть спектральных разложений MIMO LTI зависит от преобразований подобия, однако и в этом случае использование инвариантных матриц мультипликаторов позволяет получить замкнутые формулы для вычисления любых элементов матриц грамианов. Из общих формул вычисления грамианов (26), (27) следует, что в этом случае матрица мультипликаторов является общей для грамианов управляемости и наблюдаемости и равна произведению инвариантных мультипликаторов вида (46), (47) или (50), (51). Заметим, что матрицы мультипликаторов для SISO LTI систем можно вычислять с помощью таблиц Рауса с использованием коэффициентов характеристического уравнения, которые можно вычислить, не вычисляя собственные числа матрицы динамики. Преимуществами данного подхода являеются возможность получать замкнутые формулы для вычисления прямых и обратных грамианов управляемости для SISO LTI систем и отсутствие необходимости рассматривать спектральные разложения в случае кратных собственных чисел. Диагональные канонические формы отличаются от канонических форм управляемости и наблюдаемости тем, что для первых грамианы и субграмианы являются в общем случае комплексными матрицами, а для вторых действительными. Можно предположить, что вещественные части собственных чисел матрицы динамики играют важную роль в формировании спектральных разложений грамианов.

3. Спектральные разложения решений дифференциальных уравнений Сильвестра на конечном интервале

Рассмотрим две линейные стационарные непрерывные MIMO LTI динамические системы вида [27]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = 0,$$
$$y(t) = Cx(t), \tag{36}$$

где $x(t) \in R^n, u(t) \in R^d, y(t) \in R^d$. Будем рассматривать вещественные матрицы соответствующих размеров A, B, C. Примем, что система (36) устойчива,если не оговорено иное, полностью управляема и наблюдаема, все собственные числа матрицы A различны

$$x_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u(t), x_m(0) = 0,$$
$$y_m(t) = C_m x_m(t), \tag{37}$$

где $x_m(t) \in R^{n_1}, u(t) \in R^d, y_m(t) \in R^d$. Будем рассматривать вещественные матрицы соответствующих размеров A, B, C, A_m, B_m, C_m. Примем, что система (37) устойчива,если не оговорено иное, полностью управляема и наблюдаема, все собственные числа матрицы A_mразличны и не совпадают с собственными числами матрицы A.Следуя [27], рассмотрим связанные с этими системами следующие непрерывные матричные дифференциальные уравнения вида

$$\frac{dP(t)}{dt} = AP(t) + P(t)A^T + R,\ P(0) = 0_{nxn}, \tag{38}$$

где R – вещественная матрица размера (nxn).

$$\frac{dP(t)}{dt} = A_m P(t) + P(t) B_m + R_1,\ P(0) = 0_{nxn}, \tag{39}$$

где R_1– вещественная матрица размера (nxn_1). В этом разделе основное внимание будет уделено дифференциальному уравнению Сильвестра (39). Основной метод построения решения и его спектральных разложений – *операционное исчисление и разложение резольвент матриц динамики* B_m *и* A_m в ряд Фаддеева – Леверье. Последние имеют вид [28,29]

$$(Is - A_m)^{-1} = \sum_{j=0}^{n} A_{mj} s^j\ [N_m(s)]^{-1},\ \ A_{mj} = \sum_{i=j+1}^{n} a_{mi} A_m^{i-j+1},$$

$$(Is - B_m)^{-1} = \sum_{j=0}^{n_1} B_{mj} s^j\ [N_{m1}(s)]^{-1},\ \ B_{mj} = \sum_{i=j+1}^{n} b_{mi} {B_m}^{i-j+1},$$

где A_{mj}, B_{mj} – Матрицы Фаддеева, построенные для резольвент матриц A_m, B_m с помощью алгоритма Фаддеева -Леверье; $N_m(s), N_{m1}(s)$ – характеристические полиномы матриц A_m, B_m; a_{mi}, b_{mi} – коэффициенты этих полиномов.

Теорема 3.

Рассмотрим спектральные разложения решений дифференциальных уравнений Сильвестра для MIMO LTI систем (38), (39). Предположим, что эти системы устойчивы, матрицы A, B и R являются вещественными, матрицы A, B имеют простой спектр, их собственные числа s_k, s_ϱ различны, не принадлежат мнимой оси плоскости собственных чисел и выполнены условия

$$s_k + s_\varrho \neq 0, \qquad k = \overline{1,n};\ \ \varrho = \overline{1,n_1};\ \ s_k \in spec\ A, s_\varrho \in spec\ B.$$

Тогда справедливы следующие утверждения

1. Спектральные разложения решений дифференциальных уравнений Сильвестра (38), (39) в форме произведений Адамара для случая комбинационного спектра матриц динамики имеют вид

$$P_{j\eta}(t) = \Omega_{j\eta}(t) \circ \Psi_{j\eta}, \Psi_{j\eta} = A_{mj} R B_{m\eta}, \tag{40}$$

$$P_{j\eta}(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\rho=1}^{n} \frac{s_k^j s_{m\rho}{}^{\eta}}{\dot N(s_k) \dot N(s_{m\varrho})} \left[\frac{e^{(s_k, + s_{m\varrho})t} - 1}{s_k, + s_{m\varrho}} \right] A_{mj} R B_{mj}, \tag{41}$$

$$\Omega_{j\eta}(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\rho=1}^{n} \frac{s_k^j s_{m\rho}{}^{\eta}}{\dot N(s_k) \dot N(s_{m\varrho})} \left[\frac{e^{(s_k, + s_{m\varrho})t} - 1}{s_k, + s_{m\varrho}} \right],$$

$$P(t) = \Omega(t) \circ \Psi,\ \ \Psi = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} A_{mj} R B_{m\eta},$$

$$\Omega(\mathrm{t}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\rho=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\eta=1}^{n-1} \frac{s_k^j s_{m\rho}{}^{\eta}}{\dot N(s_k) \dot N(s_{m\varrho})} \left[\frac{e^{(s_k, + s_{m\varrho})t} - 1}{s_k, + s_{m\varrho}} \right].$$

2. Для случая разложения решений дифференциальных уравнений Сильвестра по простому спектру матрицы динамики справедливы те же формулы (40) – (41), но с новыми матрицами мультипликаторов

$$P_{j\eta}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k^j (-s_k)^{\eta}}{\dot N(s_k) N_1(-s_k)} (e^{s_k t} - 1) A_{mj} R B_{m\eta} = \Omega_{j\eta}(t) \circ \Psi_{j\eta}, \tag{42}$$

$$\Omega_{j\eta}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k^j (-s_k)^{\eta}}{\dot N(s_k) N_1(-s_k)} (e^{s_k t} - 1), \Psi_{j\eta} = A_{mj} R B_{m\eta}, \tag{43}$$

$$P(t) = \Omega(t) \circ \Psi,\ \ \Psi = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} A_{mj} R B_{m\eta}, \tag{44}$$

$$\Omega(\mathrm{t}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^{\eta}}{\dot N(s_k) N_1(-s_k)} (e^{s_k t} - 1). \tag{45}$$

4. Эрмитова компонента спектральных разложений решений уравнений Сильвестра имеет форму

$$P^H(t) = \frac{1}{2}(P(t) + P^*(t)),\quad P_{j\eta}^H(t) = \frac{1}{2}\left(P_{\boldsymbol{j\eta}}(t) + P_{\boldsymbol{j\eta}}{}^*(t)\right),$$

где спектральные разложения матриц $P, P^*, P_{\boldsymbol{j\eta}}, P_{\boldsymbol{j\eta}}{}^*$ определяются формулами (40) – (45).

Доказательство.

Решением дифференциального уравнения (39) является интеграл вида [1,3]

$$P(t)=\int_o^t e^{A_m\tau} Re^{B_m\tau} d\tau.$$

Применим к обеим частям уравнения преобразование Лапласа, считая начальные условия нулевыми и используя теорему о преобразовании Лапласа произведения вещественных функций времени, изображение которых представляет собой дробно-рациональную алгебраическую дробь [27]. В нашем случае эта дробь содержит один нулевой полюс, а все остальные полюса простые. В этом случае прямое преобразование имеет вид

$$\frac{f(s)}{sF(s)} = \frac{f(0)}{sF(0)} + \sum_{i=1}^{q} \frac{f(s_i)}{s_i F(s_i)}, \tag{46}$$

где функции $\frac{f(0)}{sF(0)}$ и $F(s)$ принимают вид

$$\frac{f(0)}{sF(0)} = \frac{1}{s}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\eta=1}^{n-1} \frac{-1}{s_{k'}+s_{m\varrho}} \frac{s_k^j s_{m\rho}{}^{\eta}}{\dot N(s_k)\dot N(s_{m\varrho})}\ A_{mj}RB_{mj}\right],$$

$$F(s) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\eta=1}^{n-1} \frac{-1}{s_{k'}+s_{m\varrho}} \frac{s_k^j s_{m\rho}{}^{\eta}}{\dot N(s_k)\dot N(s_{m\varrho})}\ \frac{1}{s-s_k-s_{m\varrho}}.$$

Подставив эти выражения в (77), получим изображение разложения решения дифференциальных уравнений Сильвестра (70) по комбинационному спектру матриц динамики в форме

$$P(s)=\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\eta=1}^{n-1} \frac{-1}{s_{k'}+s_{m\varrho}} \frac{s_k^j s_{m\rho}{}^{\eta}}{\dot N(s_k)\dot N(s_{m\varrho})}\ A_{mj}RB_{mj} +$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\eta=1}^{n-1} \frac{-1}{s_{k'}+s_{m\varrho}} \frac{s_k^j s_{m\rho}{}^{\eta}}{\dot N(s_k)\dot N(s_{m\varrho})}\ A_{mj}RB_{mj}\frac{1}{s-s_k-s_{m\varrho}}.$$

Выполнив обратное преобразование, получим спектральное разложения решения дифференциальных уравнений Сильвестра (70) по комбинационному спектру матриц динамики во временной области

$$P_{j\eta}(t) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} \frac{s_k^j s_{m\rho}{}^{\eta}}{\dot N(s_k)\dot N(s_{m\varrho})}\left[\frac{e^{(s_{k'}+s_{m\varrho})t}-1}{s_{k'}+s_{m\varrho}}\right] A_{mj}RB_{mj}=\Omega_{j\eta}(t)\circ\Psi_{j\eta},$$

$$\Omega_{j\eta}(t) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} \frac{s_k^j s_{m\rho}{}^{\eta}}{\dot N(s_k)\dot N(s_{m\varrho})}\left[\frac{e^{(s_{k'}+s_{m\varrho})t}-1}{s_{k'}+s_{m\varrho}}\right], \Psi_{j\eta} = A_{mj}RB_{m\eta},$$

$$P(t) = \Omega(t)\circ\Psi,\ \ \Psi = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1} A_{mj}RB_{m\eta}, \tag{47}$$

$$\Omega(t) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\eta=1}^{n-1} \frac{s_k^j s_{m\rho}{}^{\eta}}{\dot N(s_k)\dot N(s_{m\varrho})}\ \left[\frac{e^{(s_{k'}+s_{m\varrho})t}-1}{s_{k'}+s_{m\varrho}}\right].$$

Равенство (47) выражает спектральное разложение решений дифференциальных уравнений Сильвестра по комбинационному спектру матриц A_m и B_m. Это доказывает первое утверждение теоремы. Используя тождество

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} \frac{-1}{s_{k'}+s_{m\varrho}} \frac{s_k^j s_{m\rho}{}^{\eta}}{\dot N(s_k)\dot N(s_{m\varrho})} \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k^j(-s_k)^{\eta}}{\dot N(s_k)N(-s_k)} \tag{48}$$

получим аналогичные разложения по простому спектру матрицы A_m

$$P_{j\eta}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k^j(-s_k)^{\eta}}{\dot N(s_k)N_1(-s_k)}(e^{s_k t}-1)A_{mj}RB_{m\eta}=\Omega_{j\eta}(t)\circ\Psi_{j\eta},$$

$$\Omega_{j\eta}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k^j(-s_k)^{\eta}}{\dot N(s_k)N_1(-s_k)}(e^{s_k t}-1), \Psi_{j\eta} = A_{mj}RB_{m\eta},$$

$$P(t) = \Omega(t)\circ\Psi,\ \ \Psi = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1} A_{mj}RB_{m\eta}, \tag{49}$$

$$\Omega(t) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1} \frac{s_k^j(-s_k)^{\eta}}{\dot N(s_k)N_1(-s_k)}(e^{s_k t}-1). \tag{50}$$

Полученные разложения доказывают второе утверждение теоремы.

Третье утверждение следует из утверждений 1 и 2.

Равенство (80) выражает спектральное разложение решений уравнений Сильвестра по простому спектру матрицы A_m .

5. Формулы спектральных разложений некоторых энергетических метрик

Утверждение

Рассмотрим MIMO LTI системы (1) в канонической форме управляемости. Предположим, что эти системы устойчивы, матрицы А, В являются вещественными, имеют простой спектр, их собственные числа s_k, s_ϱ различны, не принадлежат мнимой оси плоскости собственных чисел и выполнены условия

$$s_k + s_\varrho \neq 0, \qquad k = \overline{1,n};\ \varrho = \overline{1,n_1};\ s_\varrho, s_\varrho \in spec\ A.$$

Тогда справедливы следующие разложения энергетических метрик грамианов управляемости по спектру матрицы динамики A

1. $Vol\ \mathcal{E}_x = c_n\sqrt{Det\ [\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\omega(n,s_k,j,\eta)\ A_jBB^T\left(A_\eta\right)^T]}, \quad c_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$

2. $Vol\ \mathcal{E}_y = c_n\sqrt{Det\ [\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\omega(n,s_k,j,\eta)\ CA_jBB^T\left(A_\eta\right)^T C^T]}, c_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$

3. $\mathrm{tr}\ P_c = \omega(n,s_k,0,0)\mathrm{tr}[A_0BB^T(A_0)^T] + \omega(n,s_k,1,1)\mathrm{tr}[A_1BB^T(A_1)^T] +$

$$+\ldots+\omega(n,s_k,n-1,n-1)\mathrm{tr}[A_{n-1}BB^T(A_{n-1})^T].$$

4. SISO LTI :$\mathrm{tr}\ P_c^F = \omega(n,s_k,0,0) + \omega(n,s_k,1,1) + \cdots + \omega(n,s_k,n-1,n-1).$

5. $E_{in} = \frac{1}{2}x^TP_c^{-1}x,$

$$P_c^{-1} = \sum_{i=1}^{n}\frac{P_{cd,n-1}\sigma_{ci}^{n-1}+\cdots+P_{cd,1}\sigma_{ci}+P_{cd,0}}{\dot N_c(\sigma_{ci})}\frac{1}{\sigma_{ci}}, \quad P_{cdj} = p_{cd,j+1}I + p_{cdj+2}P_{cd} + \cdots + P_{cd}^{n-j-1}.$$

6. $E_{out} = \frac{1}{2}x^TP_0x,$

$$\text{MIMO LTI: } P_0 = \left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{\eta=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{s_k^j(-s_k)^\eta}{\prod_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_k-s_\lambda)\prod_{\lambda=1,}^{n}(-s_k-s_\lambda)}1_{j+1\eta+1}\right] \circ\left[\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1}A_jBB^TB_\eta\right]$$

$$\text{SISO LTI: } P_0^F = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\eta=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{s_k^j(-s_k)^\eta}{\prod_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_k-s_\lambda)\prod_{\lambda=1,}^{n}(-s_k-s_\lambda)}1_{j+1\eta+1}.$$

7. Индекс центральности энергетических метрик управляемости непрерывных многосвязных стационарных систем $J_{CE,}$

$$J_{CE,} = trP_c = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\prod_{\lambda=1,\lambda\neq i}^{n}(s_i-s_\lambda)\prod_{\lambda=1,}^{n}(-s_i-s_\lambda)}\frac{\left(s_i^2\right)^{i-1}-1)}{\left(-s_i^2-1\right)}.$$

8. Средняя минимальная энергия [19]

$$E_{avmin} = \frac{1}{n}\left[p_{c0}^{-1}p_{c1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\dot N_c(\sigma_{ci})} + p_{c0}^{-1}p_{c2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma_{ci}}{\dot N_c(\sigma_{ci})} + \cdots + p_{c0}^{-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma_{ci}^{n-1}}{\dot N_c(\sigma_{ci})}\right].$$

6. Заключение

В докладе получены следующие основные результаты:

- Предложен новый метод и разработаны новые алгоритмы по-элементного вычисления конечных и бесконечных грамианов управляемости, наблюдаемости и кросс-грамианов в рамках единой декомпозиции Адамара,
- Разработан метод и алгоритмы вычисления грамианов и субграмианов на основе декомпозиции Адамара спектральных разложений решений модальных уравнений Ляпунова второго типа,

- Исследованы свойства матриц мультипликаторов, в том числе матриц Сяо, для непрерывных линейных систем, задаваемых стандартным (A, B, C) представлением в пространстве состояний.

Показаны новые возможности вычисления грамианов с помощью использования канонических преобразований в диагональную, управляемую и наблюдаемую канонические формы. В этом случае матрицы грамианов можно представить в виде произведений Адамара матриц мультипликаторов и матриц преобразованной правой части уравнений Ляпунова. Показано, что матрицы мультипликаторов являются инвариантами при различных канонических преобразованиях линейных непрерывных систем. Получены модальные уравнения Ляпунова для непрерывных SISO LTI систем в диагональной форме, разработаны новые алгоритмы поэлементного вычисления матриц грамианов для устойчивых непрерывных. MIMO LTI систем. Для непрерывных SISO LTI систем в управляемой и наблюдаемой канонических формах разработаны новые алгоритмы вычисления грамианов управляемости и их следов в форме произведений Адамара в виде матриц Сяо, Применение преобразований в канонические формы управляемости и наблюдаемости позволило упростить формулы спектральных разложений в форме матриц Сяо и упростить вычисления грамианов. В статье получены новые спектральные разложения в форме Адамара для решений алгебраических и дифференциальных уравнений Сильвестра и спектральных разложений конечных и бесконечных кросс-грамианов непрерывных SISO LTI систем. Полученные результаты могут найти применение для оптимального выбора мест размещения датчиков и исполнительных механизмов в многосвязных системах управления и в сетях, для вычислений и анализа эмпирических грамианов, оценивания риска потери устойчивости в электроэнергетических системах, в задачах анализа и синтеза систем модального управления

Литература

1. *Antoulas A.C.* Approximation of Large-Scale Dynamical Systems. -SIAM Press. -Philadephia. 2005.
2. *Хорн, Р., Джонсон, Ч. Матричный анализ -М: Мир*. 1989.- 655 с.
3. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Теория автоматического управления. -Учеб. Пособие. -М.: ЛЕНАНД, 2019. -504 с.
4. *Зубов Н.Е., Зыбин Е.Ю., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Общие аналитические формы решения уравнений Сильвестра и Ляпунова для непрерывных и дискретных динамических систем // -Москва - Известия РАН. Теория и системы управления. 2017. № 1. С. 3-20.
5. *Benner, P, Damm, T. Lyapununov* equations, Energy Functionals and Model Order Reduction of Bilinear and Stochasic Systems. // SIAM J. Control Optim., - 2011, - Vol. 49, - C.686-711.
6 *Lindmark, G., Altafini*, C. A driver mode selection strategy for minimizing the control energy for complex networks. // IFAC- PapersOnLine. -Vol 50, - No1- 2018. - pp. 8309-8314.
7. *Dilip A.S.A.* The controllability Gramian, the Hadamard product and the optimal actuator/ leader and sensor selection problem. // Nature Physics,-2015- Vol.11, pp. 779-786.
8. *Casadei, G., Wit, C.C.D., Zampieri, S.* Model Reduction Based Approximation of the Output Controllability Gramians in Large-Scale Networks. //IEEE Transactions on Control of Network Systems. - 2020. - Vol. 7, № 4, pp.1778-1788.
9. *Pasqualetti, F., Zampieri, S., and F. Bullo,* Controllability metrics, limitations and algorithms for complex networks // Proc.2014 American Control Conference, - 2014, pp. 3287-3292.
10. *Poolla, B.K., Bolognani, S., Dörfler, F.* Optimal Placement of Virtual Inertia in Power Grids. //arXiv:1510.01497v5 [math.OC] -14 Jan 2021. - pp.1-12.
11. Xiao C.S., Feng Z.M., Shan X.M. On the Solution of the Continuous-Time Lyapunov Matrix Equation in Two Canonical Forms //IEE Proceedings-D, vol. 139, no. 3, pp. 286-290.
12. Mehr, F.A. Determination of Design of Optimal Actuator Location Based on Control Energy. - Publisher: City, University of London, - 2018.
13. Hauksdottir, A.S., Sigurdsson, S.P. The continuous closed form controllability Gramian and its inverse. // Proceedings of the 2009 American Control Conference, St. Louis, MO, USA, 10–12 June 2009; pp. 5345-5350.
14. *Bakhtadze N.N., Novikov D.A., Elpashev D.V., Suleikin A.S.* Integrated Resource Management in the Digital Ecosystem of the Enterprise Based on Intelligent Consorts // IFAC-PapersOnLine. Nantes, France: Elsevier, 2022. - Vol. 55, Issue 10. – pp. 2330-2335.
15. *Kumar R., Khan M.* Pole placement techniques for active vibration control of smart structures: A feasibility study. //Journal of Vibration and Acoustics. - 2007 -Vol. 125, issue 5 pp.:601-615.
16. *Галяев А.А., Ядыкин И.Б.* О методах вычисления грамианов и использовании их в анализе линейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. 2013. - № 2.- С. 53-74..
17. *Hanzon, B., Peeters, R.L.M.* A Faddeev Sequence Method for solving Lyapunov and Sylvester Equations, // Linear Algebra and its Applications, -1996. - pp. 401-430.
18. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. Учебник-М: Изд. Лань. - 2009. - 726 с.

19. *Iskakov A.B., Yadykin I.B.* Lyapunov modal analysis and participation factors applied to small-signal stability of power systems..// Automatica; - Volume 132, October 2021, 109814.
20. *Ядыкин И.Б., Галяев И.А*., Спектральные разложения грамианов и энергетических метрик непрерывных неустойчивых систем управления. Автомат. и телемех., 2023, № 10, 132–149.
21. *Ядыкин И.Б*. Спектральные разложения обратных матриц грамианов и энергетических метрик непрерывных динамических систем// Автоматика и телемеханика (в печати).2024, No 10