ДИНАМИКИ VS СИММЕТРИИ[1]

Кушнер А.Г.
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
kushnerag@my.msu.ru

Аннотация. В докладе приведён обзор результатов, отосящихся к теории конечномерных динамик. Это новое направление в исследовании нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, возникшее в 2000-х годах. Оно является естественным распространением теории динамических систем на уравнения в частных производных и является альтернативой теории симметрий, восходящей к работам Софуса Ли.

Ключевые слова: эволюционные дифференциальные уравнения, уравнения и системы конечного типа, тасующие симметрии, точные решения, предельные циклы, управление, пространства джетов.

Введение

Теория конечномерных динамик основана на теории симметрий систем конечного типа. Однако она принципиально отличается от теории симметрий Софуса Ли [1]. Для решения уравнения в частных производных методом симметрии сначала находят векторные поля, потоки которых не меняют уравнения. Затем находят функции, инвариантные относительно этих потоков. И, наконец, ищут решения уравнений в классе этих функций [2].

Основная идея теории конечномерных динамик совершенно иная. Основная идея теории конечномерных динамик совершенно иная. Проиллюстрируем её на примере уравнения с одной пространственной переменной x. Эту переменную будем называть пространственной, в отличие от переменной t, которую мы трактуем как время.

Эволюционное уравнение

$$u_t = f(x, u, u_x, u_{xx}, \dots)$$

определяет поток Φ_t в пространстве функций, зависящих от переменной x. В частности, решение задачи Коши $u|_{t=0} = U(x)$ получается сдвигом функции U вдоль этого потока [3].

Будем искать обыкновенное дифференциальное уравнение $\mathcal{E}$, для которого поток Φ_t является тасующей симметрией, т.е. $\Phi_t(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$. Если поток трансверсален некоторому решению уравнения $\mathcal{E}$, то сдвигая это решение вдоль потока Φ_t, мы получим однопараметрическое семейство решений уравнения $\mathcal{E}$. Переменные t и x можно рассматривать как координаты на этом множестве. Таким образом, мы получаем функцию двух переменных, которая явится решением эволюционного уравнения. Более формальное описание этого метода см. ниже.

Первые работы по конечномерным динамикам эволюционных уравнений с одной пространственной переменной появились в начале 2000-х годов [4,5]. Там были найдены конечномерные динамики уравнений Колмогорова – Петровского – Пискунова и Кортевега – де Фриза. Позднее они были применены для поиска точных решений многих эволюционных уравнений. Обзор точных решений, полученных до 2020 г., приведен в [6]. В работах [7,8] метод конечномерных динамик был распространен на уравнения со многими пространственными переменными. Для таких уравнений вместо обыкновенных дифференциальных уравнений пришлось рассматривать уравнения конечного типа. Напомним, что уравнения конечного типа — это дифференциальные уравнения, решения которых однозначно определяются конечным набором констант. Такими уравнениями являются, в частности, переопределенные системы уравнений в частных производных, удовлетворяющие условиям теоремы Фробениуса. Динамика эволюционных систем построена в [9]. Применение динамик к нелинейному уранвению теплопроводности рассмотрено в [10].

1. Характеристические и тасующие симметрии ОДУ

Прежде всего рассмотрим остановимся на понятии симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) на примере уравнения (см. [11,12])

$$y^{(k+1)} = f\big(x, y, y', \dots, y^{(k)}\big). \tag{1}$$

Это уравнение порождает одномерное распределение P на пространстве k-джетов $J^k(\mathbb{R})$. Оно «натянуто» на векторное поле

[1] *Работа поддержана грантом № 23-21-00390 Российского научного фонда.*

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_0} + \dots + y_k \frac{\partial}{\partial y_{k-1}} + f \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

Кроме того, это распределение можно задать как пересечение ядер дифференциальных 1-форм

$$\begin{cases} \omega_0 = dy_0 - y_1 dx, \\ \omega_1 = dy_1 - y_2 dx \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ \omega_k = dy_k - f dx. \end{cases}$$

Пусть X — векторное поле на пространстве k-джетов $J^k(\mathbb{R})$ и пусть Φ_t — его поток. Векторное поле X называется *симметрией* уравнения (1), если его поток сохраняет распределение P, т.е. если $(\Phi_t)_*(D) = \lambda_t D$ для некоторой функции λ_t. В терминах форм это означает, что

$$L_S(\omega_j) \wedge \omega_0 \wedge \dots \wedge \omega_k = 0, \quad j = 0, \dots, k.$$

Здесь L_S означает символ производной Ли.

Очевидно, что векторные поля, пропорциональные векторному полю D, являются симметриями уравнения (1). Такие симметрии называются *характерсистическими*, Множество характеристических симметрий обозначим через $\mathrm{Char}\,\mathcal{E}$.

Множество всех симметрий уравнения (1) образует алгебру Ли относительно операции коммутирования. Эту алгебру Ли мы обозначим через $\mathrm{Sym}\,\mathcal{E}$. Множество $\mathrm{Char}\,\mathcal{E}$ образует идеал в алгебре Ли $\mathrm{Sym}\,\mathcal{E}$. Фактор-алгебра Ли по этому идеалу

$$Shuf\ \mathcal{E} = \mathrm{Sym}\,\mathcal{E} / \mathrm{Char}\,\mathcal{E} \tag{2}$$

называется алгеброй Ли *тасующих симметрий* уравнения (1).

Потоки характеристических симметрий каждую интегральную кривую распределения P, т.е. k-график каждого решения уравнения (1), переводят в себя. Напротив, потоки тасующих симметрий действуют трансверсально распределению P и перемешивают его интегральные кривые.

Пример 1. Векторные поля

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

являются тасующими и характеристическими симметриями уравнения

$$y' = -\frac{x}{y} \tag{3}$$

соответственно.

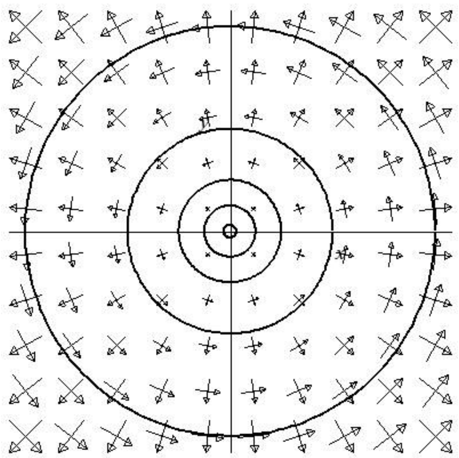

Рис. 1. Интегральные кривые уравнения (3) и его тасующие и характеристические симметрии

В каждом классе эквивалентности (2) можно выбрать представителя вида

$$S = \varphi \frac{\partial}{\partial y_0} + D(\varphi) \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + D^k(\varphi) \frac{\partial}{\partial y_k},$$

где φ — некоторая функция на пространстве $J^k(\mathbb{R})$. Эта функция называется *производящей* функцией тасующей симметрии S.

2. Динамики эволюционных уравнений с одной пространственной переменной

Рассмотрим эволюционное дифференциальное уравнение

$$u_t = f\big(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k+1)}\big). \tag{4}$$

Здесь $u_{(j)}$ — производная порядка j по x функции u. Оно определяет поток Φ_t в пространстве функций, зависящих только от пространственой переменной. В частности, решение задачи Коши $u|_{t=0} = U(x)$ получается сдвигом функции U вдоль этого потока.

Определим функцию

$$\varphi = f\left(x, y_0, y_1, \dots, y_k, f\big(x, y, y', \dots, y^{(k)}\big)\right)$$

на пространстве $J^k(\mathbb{R})$.

Дифференциальное уравнение (1) называется *конечномерной динамикой* уравнения (4) если функция φ является производящей функцией тасующей симметрии уравнения (1). Число k назывется *порядком* конечномерной динамики.

Смысл введения этого понятия следующий. Пусть $\mathcal{L}$ — k-график решения уравнения (1). Поскольку векторное поле S является тасующей симметрией, то его поток Φ_t переводит $\mathcal{L}$ в k-график другого решения $\Phi_t(\mathcal{L}) = \mathcal{L}_t$. Тогда объединение $\cup_t \mathcal{L}_t$ является k-графиком решения уравнения (1). Напомним, что k-графиком функции $y = h(x)$ является кривая

$$\Gamma_{h(x)} = \big(y_0 = h(x), y_1 = h(x), \dots, y_k = h^{(k)}(x)\big)$$

Таким образом, конечномерные динамики позволяют строить решения эволюционных уравнений, «склеивая» их из графиков решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пример 2. В качестве примера рассмотрим уравнение Кана – Хилларда [13]

$$u_t = -(ku_{xx} + h(u))_{xx}. \tag{5}$$

Здесь $h(u) = \sum_{i=0}^{3} h_i u^i$ – кубическая функция, h_i – постоянные ($i = 0, \dots, 3$). Можо показать, что это уравнение допускает конечномерную динамику $y'' = 0$. Общее решение этой динамики – линейная функция $y(x) = C_1 x + C_2$. Производящая функция $\varphi = -2(3h_3 y_0 y_1^2 + h y_1^2)$. Векторное поле

$$S = -2(3h_3 y_0 y_1^2 + h_2 y_1^2)\frac{\partial}{\partial y_0} - 6h_3 y_1^3 \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

Поток этого векторного поля может быть вычислен явно (см. [14]):

$$\Phi_t\colon \begin{cases} x \mapsto x \\ y_0 \mapsto -\dfrac{h_2 y_1 \sqrt{\dfrac{1}{y_1^2} - 12h_3 t} - h_2 - 3h_3 y_0}{3h_3 y_1 \sqrt{\dfrac{1}{y_1^2} - 12h_3 t}} \\ y_1 \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{y_1^2} - 12h_3 t}} \end{cases}$$

Применяя это преобразование к решению $y(x) = C_1 x + C_2$, получим точное двухпараметрическое семейство решений уравнения (5):

$$u(t, x) = \frac{3h_3(C_1 x + C_2) + h_2}{3h_3\sqrt{12C_1^2 h_3 t + 1}} - \frac{h_2}{3h_3}.$$

Заметим, что это решение нельзя получить, используя симметрии уравнения (5). Это показывет, что метод конечномерных динамик является альтернативой методу симметрий.

3. Предельные циклы и конечномерные динамики

Конечномерные динамики можно использовать для получения пространственно-периодических решений эволюционных уравнений.

Рассмотрим случай, когда уравнение (1) имеет порядок два, т.е. уравнение

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{6}$$

Пусть векторное поле S — тасующая симметрия этого уравнения. Пусть уравнение (2) имеет предельный цикл. Это означает, что на фазовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами y_0, y_1 имеется изолированная замкнутая фазовая траектория L. Так как кривая L замкнутая, то в силу непрерывности потока фазовая кривая $\Phi_t(L)$ также замкнутая. А так как в достаточно малой окрестности кривой L нет других замкнутых траекторий, то $\Phi_t(L) = L$. Таким образом, кривая L инвариантна относительно преобразования Φ_t.

Пример 3. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$u_t = -u + (1 - u^2 - u_x^2)u_x. \tag{7}$$

Оно допускает динамику

$$y'' = -y + (1 - y^2 - (y')^2)y'.$$

Запишем её в виде системы

$$\begin{cases} u_x = v, \\ v_x = -u_0 + (1 - u_0^2 - v_0^2)v_0. \end{cases}$$

В обозначениях джетов она имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = v_0\,, \\ v_1 = -y_0 + (1 - y_0^2 - v_0^2)v_0. \end{cases}$$

Векторное поле тасующих симметрий:

$$S = v_0 \frac{\partial}{\partial y_0} + (v_0 - u_0 - v_0 u_0^2 - v_0^3)\frac{\partial}{\partial v_0}. \tag{8}$$

Его поток

$$\Phi_t\colon \begin{cases} x \mapsto x \\ u_0 \mapsto -\dfrac{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}\cos\left(t + \arctan\left(\frac{v_0}{u_0}\right)\right)}{(-1 + \exp t)\sqrt{u_0^2 + v_0^2} - \exp t} \\ v_0 \mapsto -\dfrac{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}\sin\left(t + \arctan\left(\frac{v_0}{u_0}\right)\right)}{(-1 + \exp t)\sqrt{u_0^2 + v_0^2} - \exp t} \end{cases}$$

Векторное поле S имеет предельный цикл

$$u = \sin x\,,\ \ v = \cos x.$$

Поэтому эволюционное уравнение (7) имеет периодическое решение $u = \sin x$.

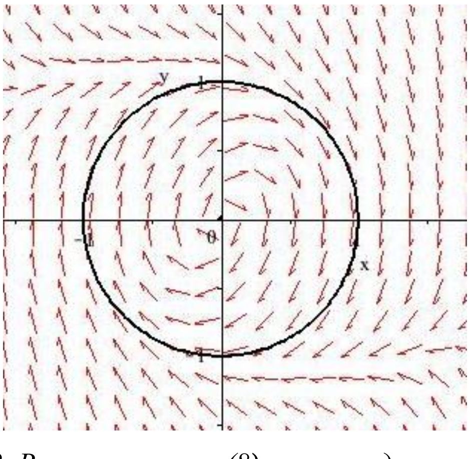

Рис. 2. Векторное поле (8) и его предельный цикл

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$u_t = u_{xx} + (\mu u^2 + \alpha)u_x + u, \tag{9}$$

где α, ν — некоторые постоянные, причём $\alpha + \mu \neq 0$. Оно допускает конечномерную динамику

$$y'' = \mu(1 - y^2)y' - y. \tag{10}$$

Векторное поле

$$S = (\alpha + \mu)y_1 \frac{\partial}{\partial y_0} - (\alpha + \mu)(\mu y_1(y_0^2 - 1) + y_0)\frac{\partial}{\partial y_1}$$

является тасующей симметрией уравнения (5). Уравнение (10) является уравнением ван дер Поля, которое, как известно, имеет предельный цикл при $\mu > 0$. Поэтому при положительных значениях μ эволюционное уравнение (9) имеет периодическое по x решение.

Литература

1. *С. Ли*. Симметрии дифференциальных уравнений. В 3 томах. – Ижевск: РХД, 2011.
2. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
3. *Vinogradov A.M.* Local symmetries and conservation laws // Acta Appl. Math. – 1984. – Vol. 3. – P. 21–78.
4. *Kruglikov B.S., Lychagina O.V.* Finite dimensional dynamics for Kolmogorov – Petrovsky – Piskunov equation // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2005. – Vol. 19. – P. 13–28.
5. *Lychagin V.V., Lychagina O.V.* Finite Dimensional Dynamics for Evolutionary Eguations // Nonlinear Dyn. – 2007. – Vol. 48. – P. 29–48.
6. *Kushner A.G., Matviichuk R.I.* Finite dimensional dynamics of evolutionary equations with Maple // In: M. Ulan, E. Schneider (Eds.), Differential Geometry, Differential Equations, and Mathematical Physics, in: Tutorials, Schools, and Workshops in the Mathematical Sciences, Birkhuser, Cham, 2021.
7. *Kushner A., Kushner E., Tao S.* Dynamics of evolutionary equations with 1+2 independent variables // Advances in Systems Science and Applications. – 2022. – Vol. 22, N 4. – P. 1–10.
8. *Kushner A*. Dynamics of evolutionary differential equations with several spatial variables // Mathematics. – 2023. – Vol. 11. N 2. – Special Issue Dynamics and Control Theory with Applications. – P. 1–11.
9. *Kushner A.G., Matviichuk R.I.* Dynamics and exact solutions of non-evolutionary partial differential equations // Differential Geometry and its Application. – 2021. – Vol. 76. – P. 101761.
10. *Lychagin V.* Finite-Dimensional Dynamics in Nonlinear Heat Transfer // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 44, N 4. – P. 1407–1415.
11. *Duzhin S.V., Lychagin V.V.* Symmetries of distributions and quadrature of ordinary differential equations // Acta Appl. Math. – 1991. – Vol. 24. – P. 29–57.
12. *Kushner A.G., Lychagin V.V. Rubtsov V.N.* Contact geometry and nonlinear differential equations. – Cambridge: Cambridge University Press. – 2007. P. – xxii+496 pp.
13. *Cahn J.W., Hilliard J.E.* Free Energy of a Nonuniform System. I. Interfacial Free Energy // The Journal of Chemical Physics. AIP Publishing. – 1958. – Vol. 28, N 2. – P. 258–267.