

# ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСШИРЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА С ПРИВЛЕЧЕНИЕМ ВНЕШНЕГО ФИНАНСИРОВАНИЯ<sup>1</sup>

Жукова А.А., Флёрова А.Ю.,

Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление"

Российской академии наук, Москва, Россия

Zhukova.aa@phystech.edu, a.flerova@mail.ru

Рыбкина Е.Г.

Московский физико-технический институт

(национальный исследовательский университет), Москва, Россия

rybkina.eg@phystech.edu

*Аннотация.* Данная работа направлена на изучение оптимального поведения производителя, который решает как и когда перераспределить часть выручки для расширения производства. В начальный момент времени фирма получает от инвестора определенную сумму, которая должна быть возвращена в течение установленного периода времени. Задача сформулирована как задача оптимального управления с ограничением типа неравенства. В работе представлена возможная численная реализация такой задачи и изучается влияние параметров модели на оптимальное поведение производителя.

*Ключевые слова:* оптимальное управление, расширение производства, инвестиции.

## Введение

В данной работе рассматривается производитель (фирма), который производит один вид продукции и планирует свою деятельность на определенный период времени. В начальный момент времени компания получает определенную сумму средств в виде инвестиций. Производитель может использовать часть выручки для расширения производства, т.е. увеличения будущих доходов. Цель производителя - максимизировать свой доход (доход владельцев компании). Цель данной работы - изучить оптимальное поведение производителя и посмотреть, какие факторы влияют на него. А это, в свою очередь, важно при разработке механизмов роста стратегически важных отраслей и мер поддержки бизнеса.

Модель расширения производства, учитывающая только собственные средства производства, рассматривалась в работах [1]-[3] и было показано, что у производителя в этом случае есть два временных периода: вкладывать все в воспроизводство (рост) или сберегать все и ничего не вкладывать. Значение единственно возможного момента переключения между этими режимами зависит от параметров модели. В этом случае задача максимизации прибыли производителя является задачей оптимального управления, имеет решение, допускает применение принципа максимума и использование уравнения Гамильтона - Якоби - Беллмана. В работе [4] рассматривается модель с недетерминированным влиянием внешней среды, исследование которой было осуществлено с помощью машинного обучения. Показаны возможности поиска решения методами обучения с подкреплением, которые все чаще помогают при решении задач вычислительной экономики [5].

Целью данного исследования является анализ того, как оптимальное управление зависит от внутренних и внешних факторов. Среди внутренних факторов, которые мы моделируем, мы можем назвать отдачу от инвестиций в расширение производства, затраты на производство, горизонт управленческого планирования, нетерпеливость владельцев производственной компании. Внешний параметр - это сумма денег, которую внешние инвесторы предоставляют руководству производственной фирмы.

## 1. Модель

Рассмотрим модель оптимального управления производством с привлечением внешних инвестиций на ограниченный период времени  $[0, T]$ . Предположим, что производитель производит единственный вид продукции, который продается мгновенно и без дополнительных затрат. Обозначим выручку от реализации товара как  $x(t)$ . В то же время на производство товаров тратится сумма  $(1 - \mu)x(t)$ ,

---

<sup>1</sup> Данное исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда № 24-21-00494, <https://rscf.ru/project/24-21-00494/>

пропорциональная выручке, где  $\mu \in (0,1)$ . Доля  $u(t)$  от объема производства  $x(t)$  используется для расширения производства:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha u(t)x(t), \quad (1)$$

где  $\alpha$  - параметр, характеризующий рентабельность инвестиций в расширение. На него могут влиять экономические условия, спрос на продукцию фирмы или некоторые другие внешние или внутренние обстоятельства. В данном исследовании мы рассматриваем  $\alpha$  как положительную константу. Понятно, что вложить всю выручку в расширение производства невозможно, часть средств  $\mu x(t)$  отнимается за счет стоимости производства товара. Итак, ограничение на управляющий параметр  $u(t)$  составляет  $0 \leq u(t) \leq \mu$ .

Предположим, что в начальный момент времени производитель получает сумму  $A > 0$  денег от внешнего инвестора, и производитель обязуется вернуть сумму  $A$  в течение запланированного периода производства  $T$ . Итак, начальный капитал фирмы равен  $x(0) = A$ . Механизм погашения долга перед инвестором заключается в следующем: производитель отдает инвестору часть  $y$  ( $y \in [0,1]$ ) прибыли, оставшейся после того, как были произведены производственные затраты, и была выбрана доля  $u(t)$  для увеличения производства, таким образом в течение времени  $T$  выплачивается сумма не менее  $A$ :

$$\int_0^T y(t)(\mu x(t) - u(t)x(t))dt \geq A.$$

Цель производителя в рамках этой модели - максимизировать свой дисконтированный доход за период  $T$  или, точнее, доход владельцев предприятия. Коэффициент дисконтирования обозначается как  $\delta$ . Этот доход состоит из тех частей выручки, которые не были использованы для расширения производства и не были выплачены в качестве долга инвестору.

Таким образом, модель управления расширением производства с возможным внешним финансированием формулируется как задача оптимального управления следующим образом, а управляющим параметром является  $u(t)$  - доля прибыли, распределяемая на расширение производства.

$$\int_0^T (\mu - u(t))x(t)(1 - y(t))e^{-\delta t} dt \rightarrow \max$$

$$\dot{x}(t) = \alpha u(t)x(t)$$

$$0 \leq u(t) \leq \mu,$$

$$0 \leq y(t) \leq 1$$

$$x(0) = x_0 + A,$$

$$\int_0^T y(t)(\mu - u(t))x(t)dt \geq A.$$

Функционал представленной задачи оптимального управления имеет квадратичную форму, а управляемая система является линейной по управлению. Решение такой задачи существует на компактном множестве элементов управления, однако в общем случае нельзя ожидать, что оно будет уникальным. Анализ этой модели с использованием принципа максимума выявляет очень сложную зависимость управления от параметров модели. Фактически, для некоторого диапазона параметров точное время перехода от инвестиционного режима к режиму выплаты дивидендов определяется из трансцендентного уравнения. Вот почему для этого необходим численный подход.

## 2. Численный анализ решения

В данной работе упор делается на численное решение задачи. Чтобы использовать возможности численных реализаций, давайте перейдем к новым переменным.

- $V(t) = u(t)x(t)$  - это сумма денег, вложенная в расширение производства

- $C(t) = (\mu - u(t))x(t)(1 - y(t))$  - сумма инвестиций в расширение производства. сумма, которая увеличивает благосостояние производителя (владельцев предприятия)
- $D(t) = y(t)x(t)(\mu - u(t))$  - сумма денег, выплаченная в качестве долга инвесторам.

Используя эти переменные, задача представляется следующим образом

$$\int_0^T C(t)e^{-\delta t} dt \rightarrow \max$$

$$\dot{x}(t) = \alpha V(t)$$

$$C(t) + V(t) + D(t) \leq \mu x(t)$$

$$x(0) = x_0 + A,$$

$$\int_0^T D(t)dt \geq A.$$

Задача оказывается линейной, поэтому при переходе к дискретному времени, можно применить численные расчеты. В дискретном времени задача имеет следующий вид

$$\sum_{t=0}^T C(t)e^{-\delta t} \rightarrow \max$$

$$x(0) = X_0 + A,$$

$$x(t+1) = x(t) + \alpha V(t),$$

$$\sum_{t=0}^T D(t) \geq A,$$

$$C(t) + V(t) + D(t) \leq \mu x(t).$$

В рамках данной работы будем считать  $x_0=0$ . Для анализа этой линейной постановки можно использовать стандартные методы. Например, эта задача линейного программирования удобно решается симплекс методом, но можно применить и метод внутренней точки [6]. Мы применили симплекс метод к численному анализу с использованием пакета оптимизации на языке Python и приводим результаты в виде графиков ниже.

### 2.1. Зависимость оптимального управления от внешнего финансирования

На рисунках 1-3 можно увидеть эффект от увеличения первоначальных внешних инвестиций. Похоже, что этот параметр мало влияет на управленческие решения о сроках. Однако объем инвестиций в рост производства, показанный на рисунке 3, по-видимому, тесно связан с заемными средствами.

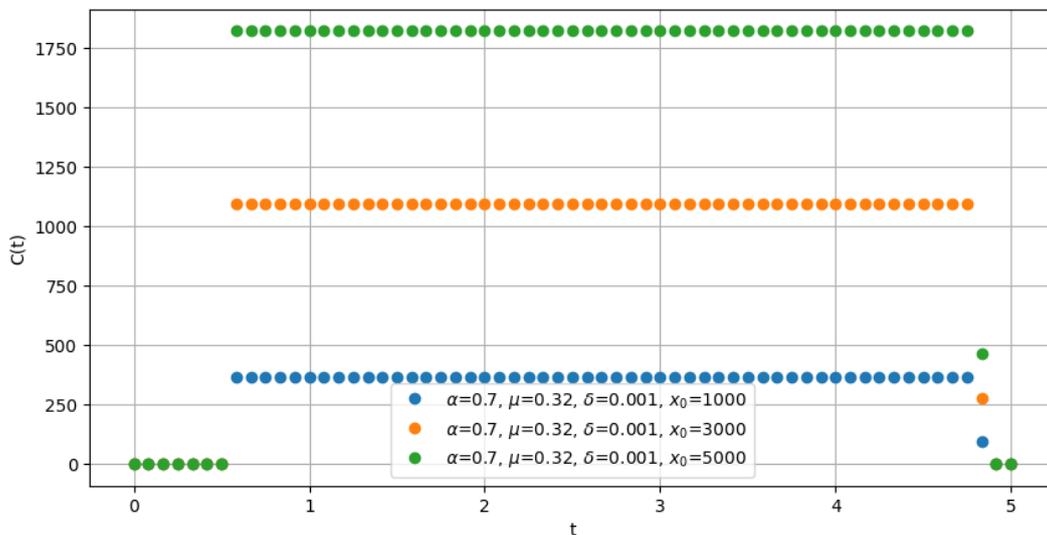


Рис. 1. Зависимость выплаты дивидендов от объема внешнего финансирования

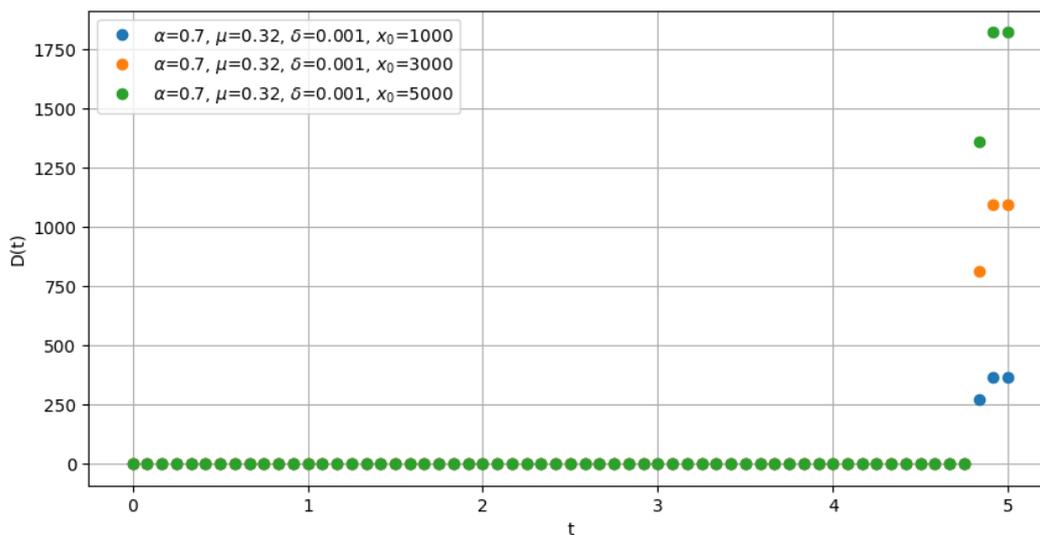


Рис. 2. Зависимость выплаты внешним инвесторам от объема внешнего финансирования

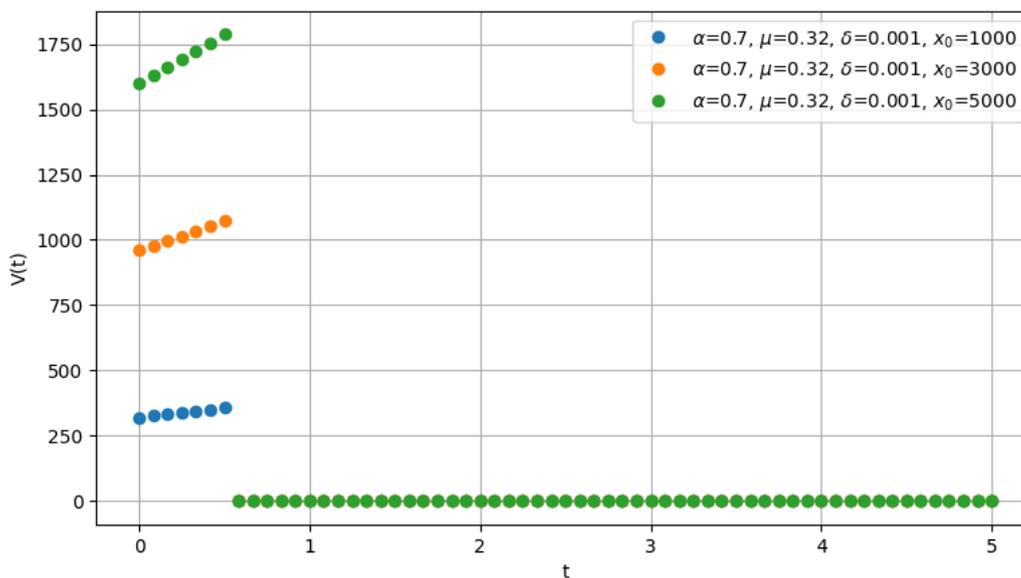


Рис. 3. Зависимость затрат на инвестиции в расширение производства от объема внешнего финансирования

## 2.2. Зависимость оптимального управления от окупаемости инвестиционных затрат

На рисунках 4, 5 и 6 можно увидеть эффект увеличения и уменьшения отдачи от инвестиционных расходов. Более высокая доходность делает инвестиции более привлекательными, а дивиденды выплачиваются позже. Долг выплачивается тем более позже, поскольку инвестиции в рост приносят больше денег в производство, и выплата внешнего долга может произойти позднее.

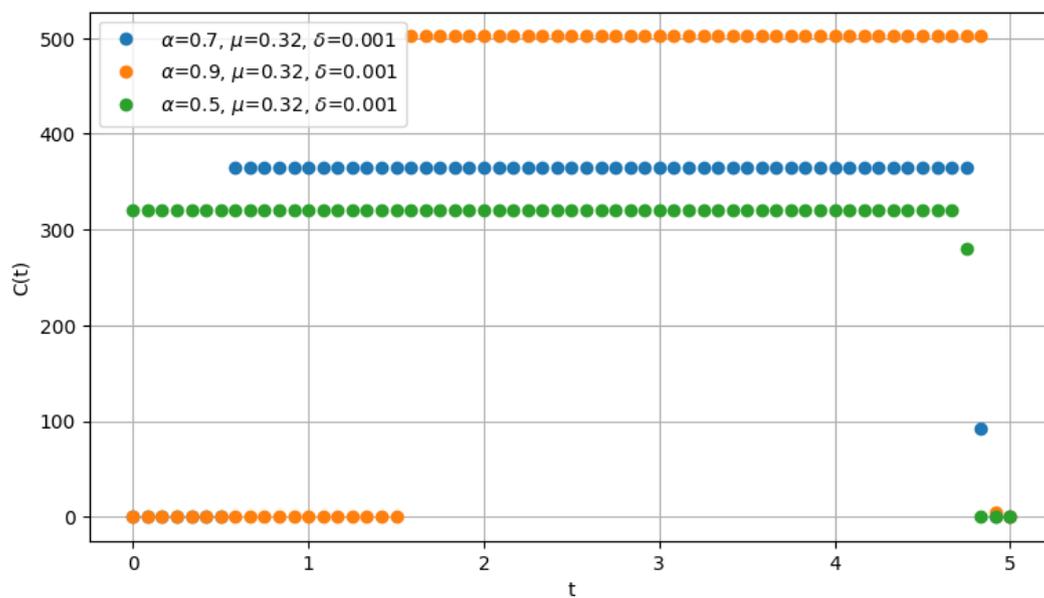


Рис. 4. Зависимость выплаты дивидендов от окупаемости инвестиционных затрат

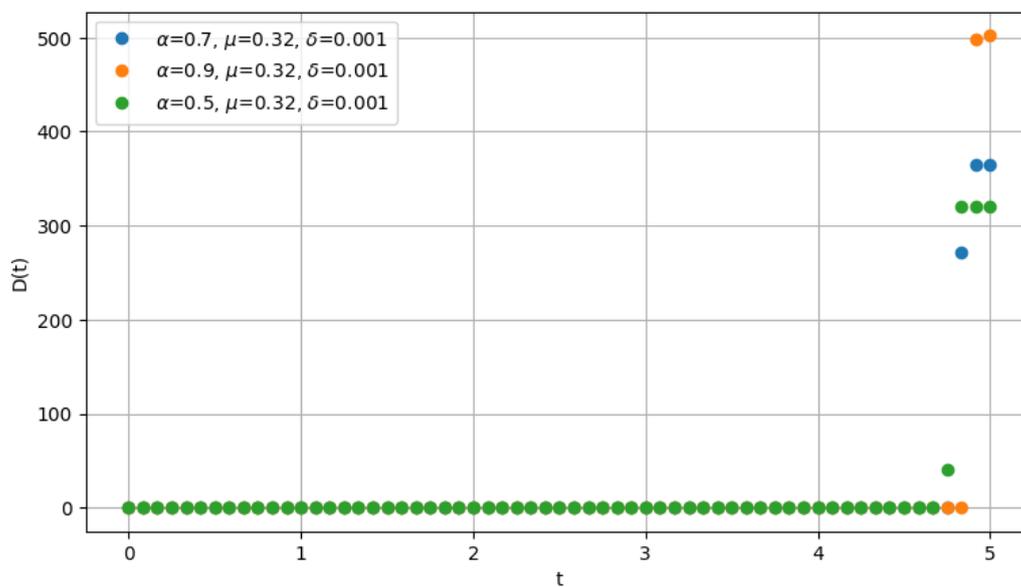


Рис. 5. Зависимость выплаты внешним инвесторам от окупаемости инвестиционных затрат

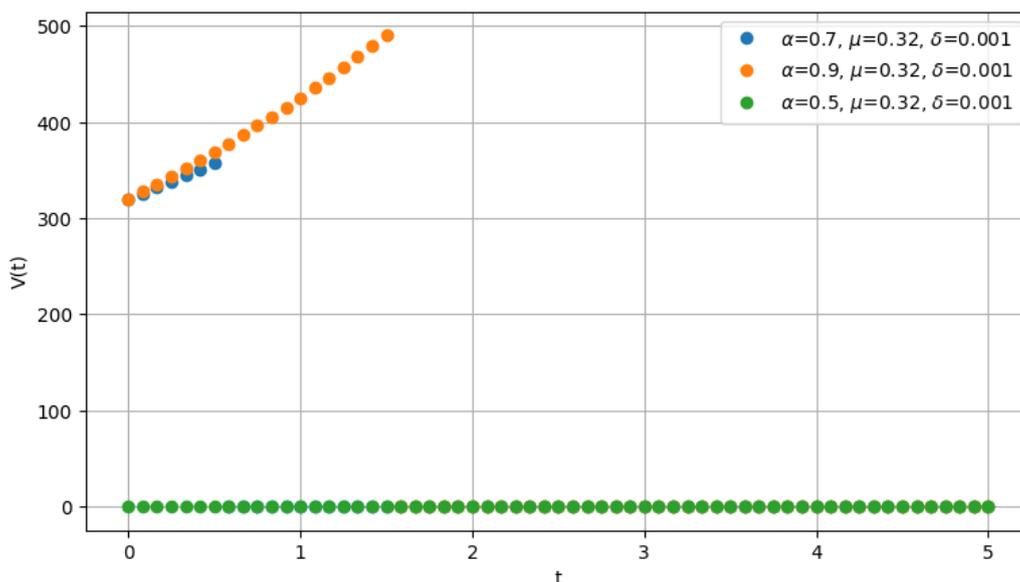


Рис. 6. Зависимость затрат на инвестиции в расширение производства от окупаемости инвестиционных затрат

### 2.3. Зависимость оптимального управления от показателя терпеливости собственников

На рисунках 7 – 9 можно увидеть, как рост нетерпеливости собственников влияет на оптимальное управление инвестициями. Чем выше уровень нетерпеливости собственников, тем короче сокращается время, отведенное на инвестирование в рост компании. Кроме того, можно заметить, что выплаты долга и дивидендов также происходят раньше, когда владельцы становятся более нетерпеливыми. Это связано с тем, что нетерпеливые владельцы предпочитают получать прибыль в ближайшем будущем, а не ждать долгосрочных результатов инвестиций.

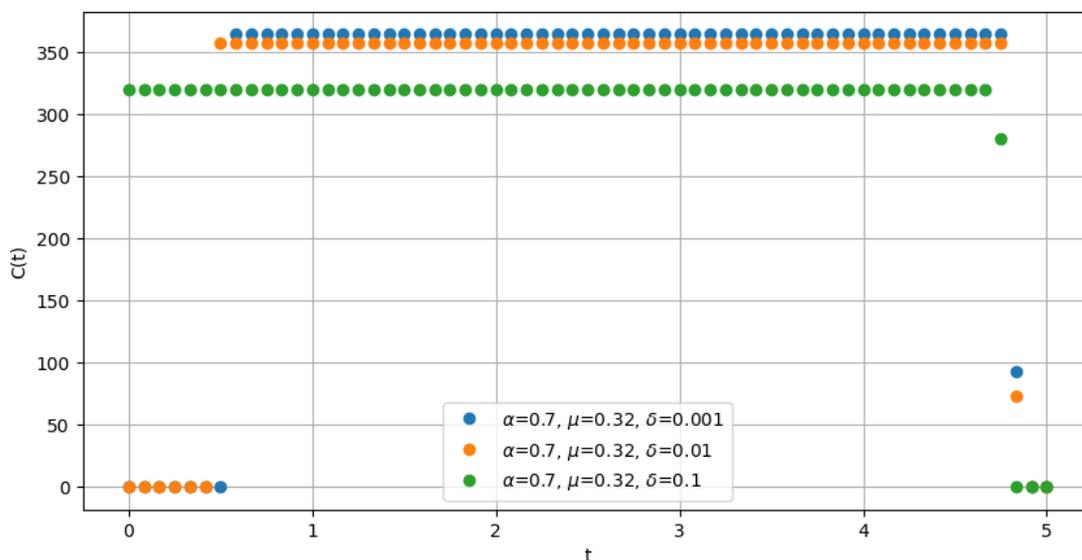


Рис. 7. Зависимость выплаты дивидендов от показателя терпеливости собственников

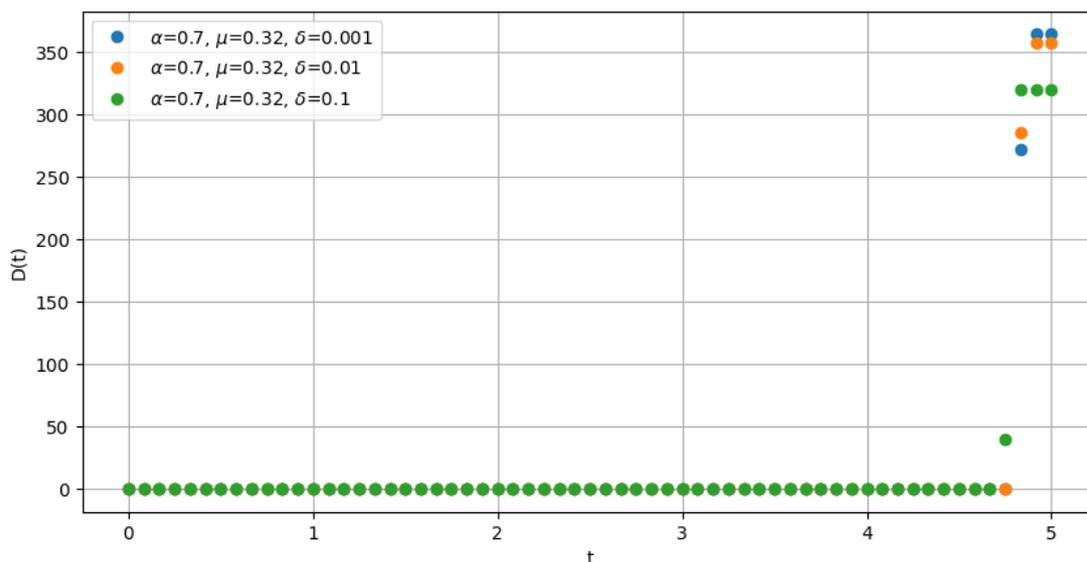


Рис. 8. Зависимость выплаты внешним инвесторам от показателя терпеливости собственников

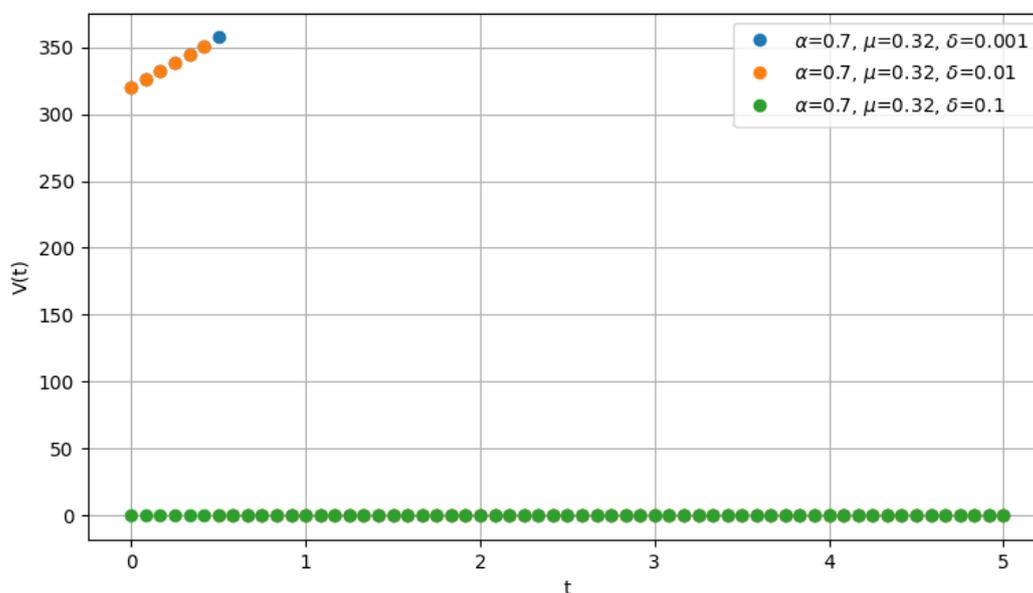


Рис. 9. Зависимость затрат на инвестиции в расширение производства от показателя терпеливости собственников

#### 2.4. Зависимость оптимального управления от затрат на производство

Рисунки 10, 11 и 12 демонстрируют тенденцию к увеличению времени, необходимого для инвестирования в рост фирмы, по мере увеличения издержек производства. Это связано с тем, что по мере роста издержек производства компаниям требуется больше времени для накопления необходимых средств и достижения оптимального уровня прибыли. Кроме того, можно заметить, что по мере роста себестоимости продукции момент выплаты долга и дивидендов также отодвигается. Это связано с необходимостью компаниям сосредоточить свои ресурсы на покрытии текущих расходов, прежде чем переходить к выплате долгов и дивидендов.

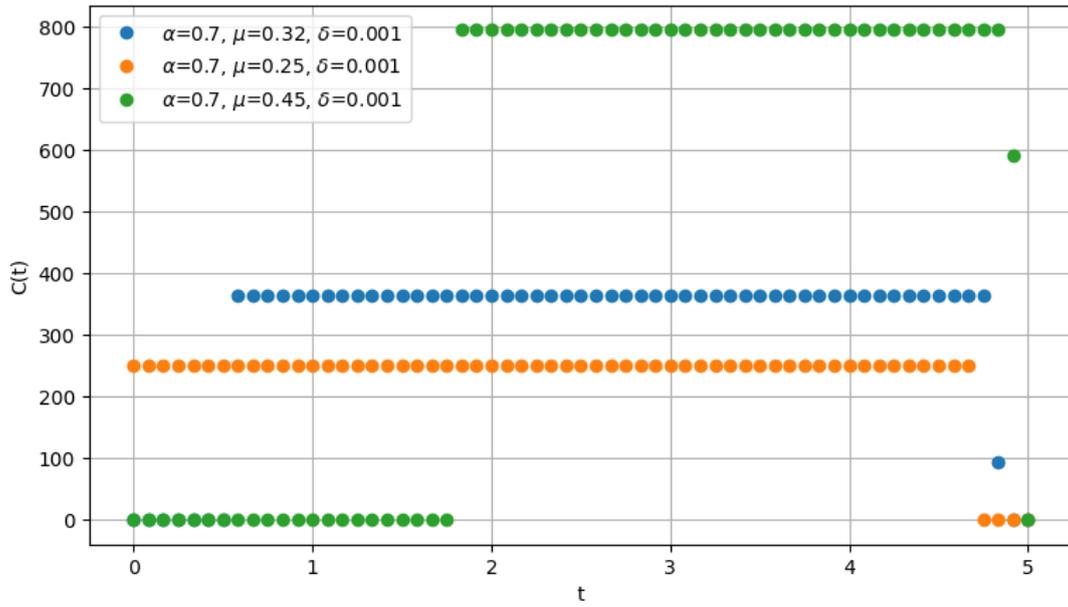


Рис. 10. Зависимость выплаты дивидендов от затрат на производство

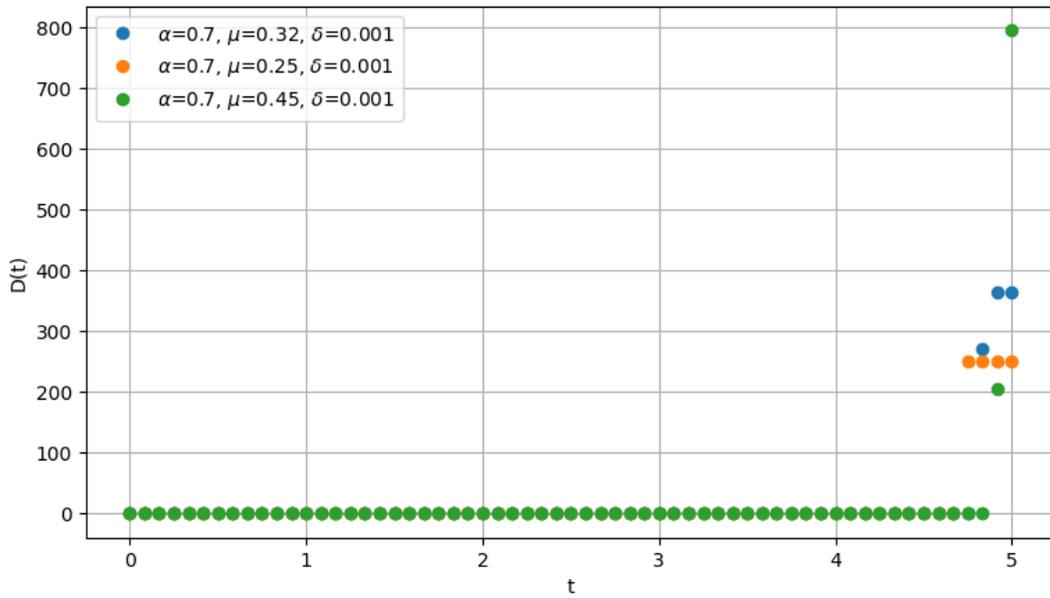


Рис. 11. Зависимость выплаты внешним инвесторам от затрат на производство

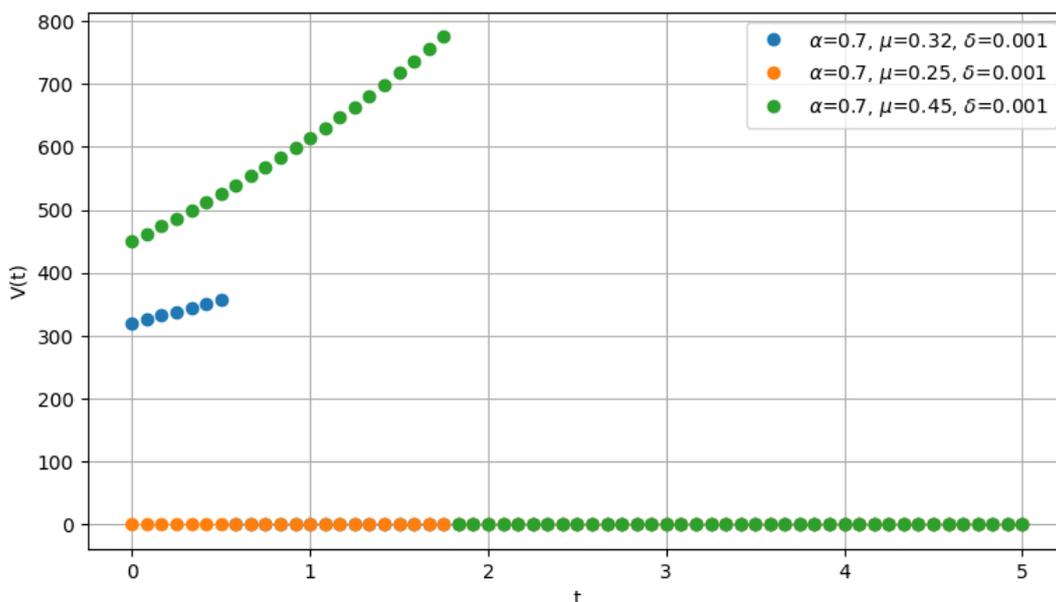


Рис. 12. Зависимость затрат на инвестиции в расширение производства от затрат на производство

## 2.5. Зависимость оптимального управления от горизонта планирования

На рисунках 13, 14 и 15 можно видеть, что характер инвестиций в рост меняется в зависимости от длины горизонта планирования. При коротком горизонте планирования компании стремятся как можно скорее погасить долг и дивиденды, чтобы максимизировать краткосрочную прибыль. Это может означать, что компании будут меньше инвестировать в рост, чтобы иметь возможность погасить долги и дивиденды в ближайшем будущем. С другой стороны, при более длительном горизонте планирования компании могут быть более склонны инвестировать больше в рост, чтобы максимизировать прибыль в долгосрочной перспективе, даже если это означает отсрочку выплаты долга и дивидендов.

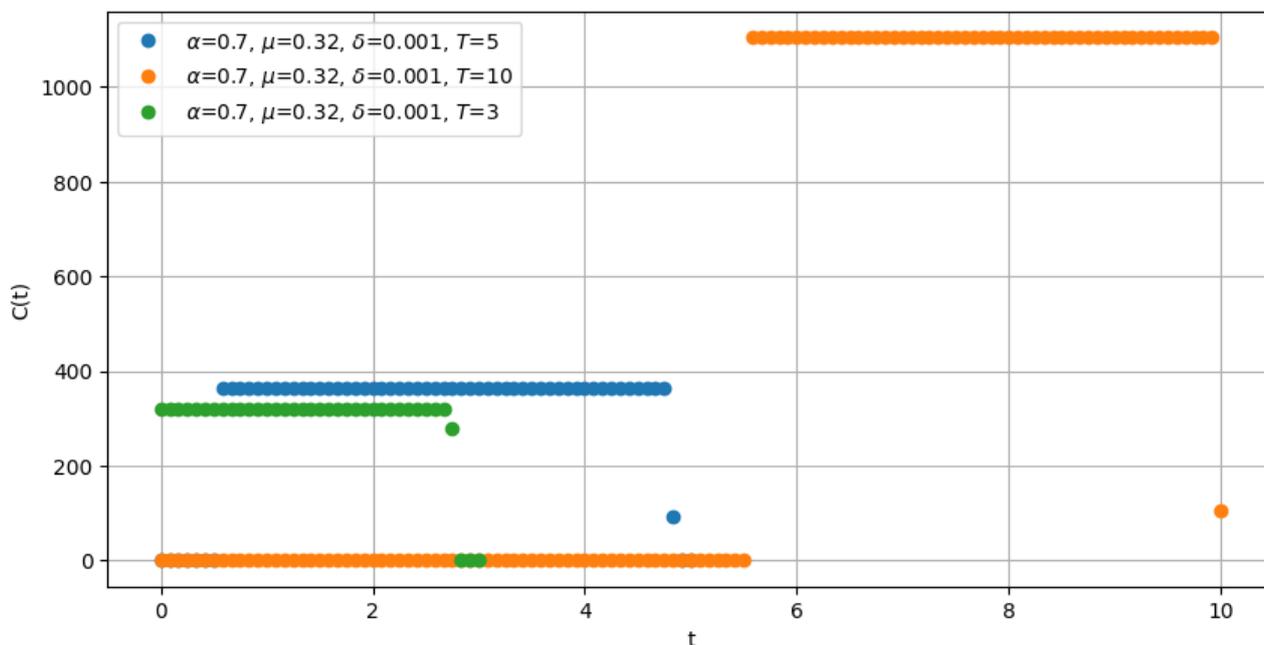


Рис. 13. Зависимость выплаты дивидендов от горизонта планирования

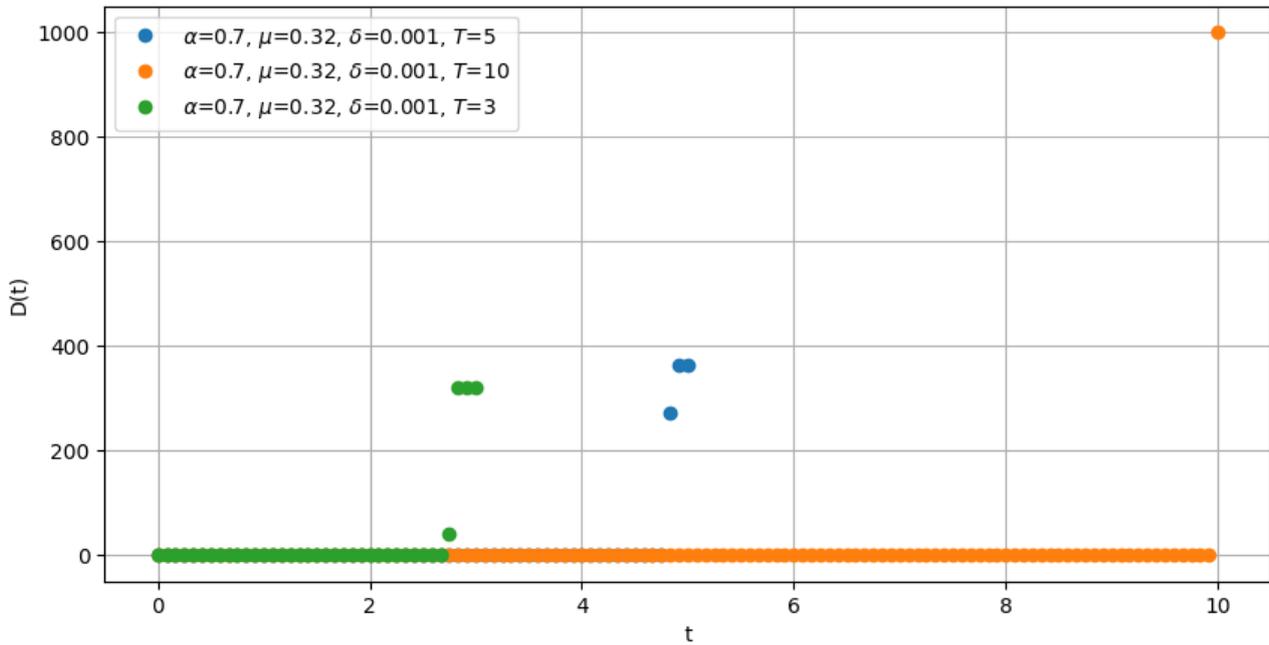


Рис. 14. Зависимость выплаты внешним инвесторам от горизонта планирования

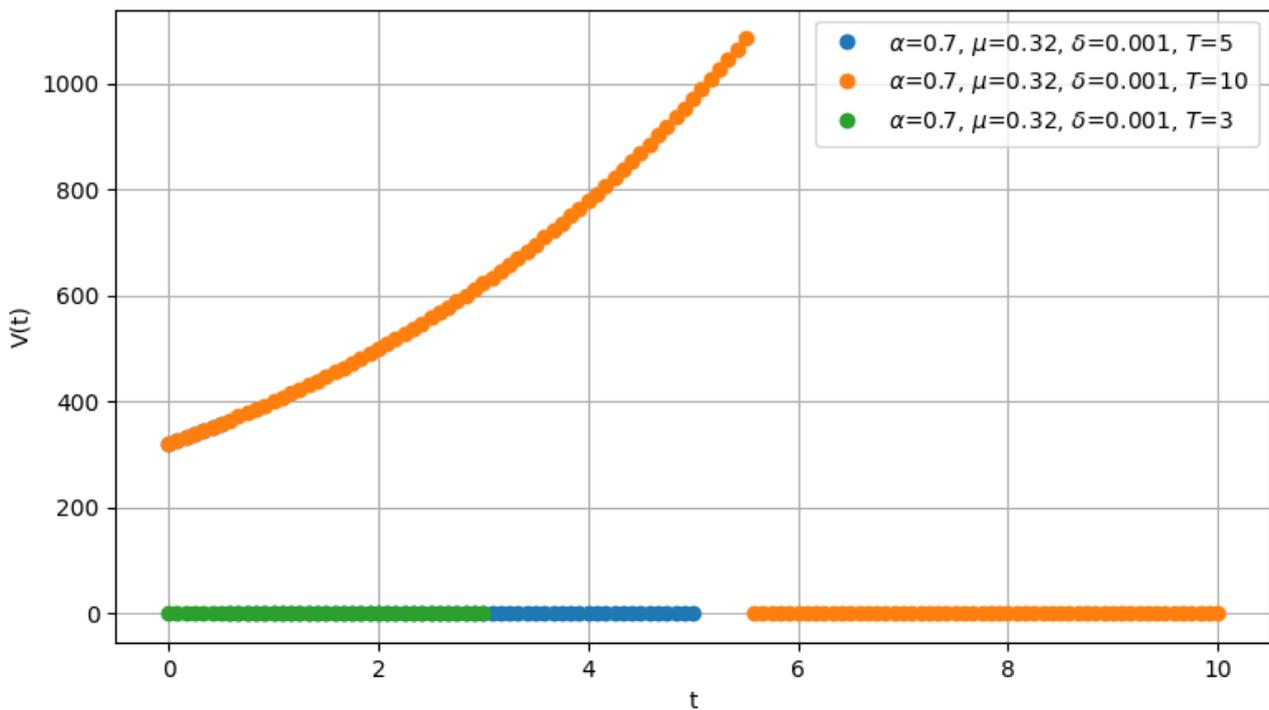


Рис. 15. Зависимость затрат на инвестиции в расширение производства от горизонта планирования

### 3. Заключение

В данной работе рассматривается модель оптимального поведения производителя, получающего инвестиции, которыми он может управлять и направлять на расширение производства. Представлено численное решение задачи максимизации прибыли фирмы как задачи оптимального управления с фазовым ограничением. Как мы видели, оптимальная траектория имеет не более двух режимов. Это обязательный режим погашения долга перед инвесторами (возврат инвестиций), режим накопления (выручка постоянна, прибыль остается у производителя, т.е. переходит к владельцам компании в виде дивидендов) и третий режим, когда производство расширяется (все доходы направляют на расширение производства, и оно увеличивается). Переключение между этими режимами зависит от параметров модели, в данной работе рассматривались следующие ключевые параметры: время планирования,

себестоимость продукции, коэффициент дисконтирования, размер внешних инвестиций, коэффициент возврата инвестиций в расширение, а также их влияние на поведение производителя.

## Литература

1. *Flerova A., Zhukova A.* Analysis of the model of optimal expansion of a firm // *Advances in Optimization and Applications. OPTIMA 2022. Communications in Computer and Information Science.* – V. 1739. – Cham: Springer Nature Switzerland, 2022. – P.109–123.
2. *Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. – М.: Факториал, 2006. – 144 с.
3. *Матвеев А.С., Якубович В.А.* Оптимальные системы управления: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи: Учеб. пособие. – СПб.: Изд-во С.-Петербургск. ун-та, 2003. – 540 с.
4. *Delev A., Flerova A., Zhukova A.* Application of Machine Learning in the producer's optimal control problem with non-stable demand // *2022 8th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT).* – IEEE, 2022. – P. 867–871.
5. *Maliar L., Maliar S., Winant P.* Deep learning for solving dynamic economic models // *Journal of Monetary Economics.* – 2021. – Т. 122. – С. 76-101.
6. *Жадан В.Г.* Методы оптимизации. Часть II. Численные алгоритмы. – М.: МФТИ, 2014. – 271 с.