

# ОБ АДАПТАЦИИ В МОДЕЛЯХ РАСТИТЕЛЬНОЙ ПОПУЛЯЦИИ

Воротынцев А.В.

ФИЦ «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия

avv\_alexv@mail.ru

*Аннотация.* Исследуется поведение весьма общей модели роста биомасс популяции растений, максимизирующей продуктивность на конечном отрезке времени в условиях постоянной внешней среды. Формулируется уравнение Беллмана и с его помощью описываются оптимальные управления модели.

*Ключевые слова:* популяция растений, максимальная продуктивность, агрофитоценоз, математическое моделирование.

## Введение

Растительная популяция функционирует в среде, поведение которой частично непредсказуемо или предсказуемо с некоторым распределением вероятности. Параметры среды первого рода будем называть неопределенными, а параметры среды второго рода – случайными. Характерным примером случайных параметров являются метеоданные погоды. Примером неопределенных непредсказуемых параметров среды обитания растительной популяции являются климатические изменения, нашествия вредителей и т.д. Третьим родом параметров среды можно считать полностью предсказуемые параметры, например, величину приходящей радиации в солнечный день, зависящей от движения Солнца. Поведение предсказуемых параметров описывается детерминированными функциями времени, а поведения случайных параметров – стохастическими функциями времени. Неопределенные параметры представляем непредсказуемыми событиями, имеющими определенные последствия для популяции. Влияние совокупности случайных и непредсказуемых параметров среды на функционирование популяции также будем называть неопределенностью среды.

Внутри популяции возникают мутации, изменяющие процессы функционирования и размножения популяции. Функционирование популяции также изменяется временным потоком неопределенностей среды. Как утверждает теория эволюции, в результате таких изменений часть или вся популяция может погибнуть. Оставшаяся часть выживет за счет приспособления к среде с новыми параметрами.

Приспособление или адаптацию растительной популяции, например, злаков к условиям среды можно трактовать как оптимизацию поведения популяции в каждый момент времени с конечной целью максимизации потомства и в конечном счете выживания.

Это положение служит отправной посылкой для усилий построения адаптивной математической модели продукционного процесса популяции растений.

## 1. Модель роста биомасс РП

Обозначим через  $\Phi_0$  – массу углерода ассимилятов чистого фотосинтеза единицы поверхности зеленого листа, а  $S_l\Phi_0$  – масса углерода ассимилятов, производимых за единицу времени листьями площади  $S_l$ , растущими на единице площади почвы. Доли  $\tilde{\rho}_i S_l \Phi_0 \Delta t$ ,  $\sum \tilde{\rho}_i = 1$ ,  $\tilde{\rho}_i \geq 0$ , всей массы  $S_l \Phi_0$  углерода ассимилятов, произведенных листьями за время  $\Delta t$  флоры растений направляются на рост биомассы  $\Delta m_i$ , дыхание поддержания  $\tilde{R}'_i(T_i)m_i \Delta t$  и дыхания роста  $\tilde{R} \Delta m_i$  биомассы  $m_i$  каждого  $i$ -го органа растения,  $i \in (l, r, R, s)$ .

$$\tilde{\rho}_i S_l \Phi_0 \Delta t = \Delta m_i + \tilde{R}'_i(T_i)m_i \Delta t + \tilde{R} \Delta m_i . \quad (1.1)$$

Здесь  $m_i$ ,  $i \in (l, r, R, s)$ , обозначает массу углерода в момент времени  $t$  в сухой биомассе  $i$ -го органа всех растений популяции, произрастающих на единице площади почвы. Далее под биомассой  $m_i$  будем понимать указанную массу углерода  $i$ -го органа. Таким образом,  $m_l$  – это биомасса листьев (leaves),  $m_r$  – биомасса корней (roots),  $m_R$  – биомасса репродуктивных органов (seeds),  $m_s$  – биомасса стеблей (stems, trunks).

Исходя из выражения (1.1), определим модель  $M_0$  следующими выражениями:

$$\frac{d}{dx} m_i = \tilde{\rho}_i \tilde{P} M - R'_i m_i, i \in (l, r, R, s), \text{ где} \quad (1.2)$$

$$\tilde{P} = \frac{1}{M} \frac{S_l \Phi_0}{1 + \tilde{R}}, R'_i = (1 + \tilde{R})^{-1} \tilde{R}'_i ;$$

$$M = m_l + m_r, \sum_i \tilde{\rho}_i = 1, \tilde{\rho}_i \geq 0 ; \quad (1.3)$$

$$p = (\bar{\mu}_s, R_a^0, d_a^0, c_a^0, I_\phi, T_l) \in R^{dp}.$$

Здесь  $\bar{P}$  – чистый фотосинтез листьев площади  $S_l$ , растущих на единице поверхности почвы, поделенный на суммарную биомассу  $M$  листьев и корней;  $R_i'$  – коэффициент дыхания поддержания, скорректированный на множитель  $(1 + \bar{R})^{-1}$ .

Модель  $M_0$  (1.1) – (1.3) определяет динамику (1.2) фазовых переменных  $m_i(t)$  в зависимости от заданных функций  $\tilde{\rho}_i$ ,  $\Phi_0$ ,  $R_i'$ , заданных констант растения, а также от набора параметров-функций времени  $p = p(t)$ . Набор  $p$  – это набор  $dp$  скалярных параметров  $p = (\bar{\mu}_s, R_a^0, d_a^0, c_a^0, I_\phi, T_l)$  внешней среды, зависящих от времени. Например, зависимость коэффициентов дыхания  $R_i'(T_l) := (1 + \bar{R})^{-1} \tilde{R}_i'(T_l)$  от заданной температуры листьев  $T_l(t)$ , обозначается как зависимость от полного набора параметров  $p$ .

Набор параметров  $p$  включает следующие параметры внешней среды:  $\bar{\mu}_s(t)$  – нормированный водный потенциал корнеобитаемого слоя почвы;  $R_a^0(t)$  – поток радиации, поглощенной единицей площади поверхности РП;  $d_a^0(t)$  – дефицит влажности воздуха над РП;  $c_a^0(t)$  – концентрация  $\text{CO}_2$  над поверхностью РП;  $I_\phi(t)$  – поток фотосинтетически активной радиации (ФАР), поглощенной РП,  $T_l(t)$  – температура листьев.

Модель  $M_0$  (1.2) – (1.3) служит основой построения известных прикладных моделей, [1] – [2] имитирующих продукционный процесс агроэкосистем. В этих моделях, как и в модели  $M_0$ , биомассы  $m_i$  считаются фазовыми переменными. Функция  $\Phi_0$  определяется зависимостью  $\Phi_0(m_i, p)$ , например, зависимостью простейшего вида [4]; коэффициенты дыхания  $R_i' = R_i'(p)$ .

Проблемой является определение ростовых функций  $\tilde{\rho}_i$ . Насколько это известно автору, функции  $\tilde{\rho}_i$  определяются, в частности в [1] – [2] статистическими методами как функции  $\tilde{\rho}_i = \tilde{\rho}_i(t, a)$  заданного вида с неизвестными параметрами  $a$ , которые оцениваются исходя из натуральных данных. Очевидно, что такой простейший подход крайне ограничивает возможность исследования и идентификации прикладных моделей. Это соображение послужило причиной настоящего исследования и приложения теории оптимального управления.

Если в модели  $M_1$  (1.2) - (1.3) функции  $P$  и  $R_i'$  являются функциями вида

$$P = P(\rho, p), R_i' = R_i'(p), i \in (l, r), \text{ а также} \quad (1.4)$$

$$S_l = \beta_l m_l, \frac{d}{dx} m_i \geq 0, \quad (1.5)$$

где  $\rho = m_r/M$  – доля биомассы корней  $m_r$  в биомассе  $M = m_r + m_l$ ,  $p$  – набор параметров. Тогда преобразование:

$$\bar{P} = (1 - \tilde{\rho}_s)^{-1} P, \tilde{\rho}_i = (1 - \tilde{\rho}_s) \rho_i, \text{ где } \tilde{\rho}_s = \tilde{\rho}_s(t), i \in (l, r, R); \quad (1.6)$$

$$\rho_l = (1 - u_R)(1 - \rho) - \rho_{lr}, \rho_r = (1 - u_R)\rho + \rho_{lr}, \rho_R = u_R,$$

$$\text{где } \rho_{lr} = u_{lr} + \rho(1 - \rho)P^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} P. \quad (1.7)$$

$$\ln M = x_1, m_R = x_2, u_R = u_2,$$

$$x = (x_1, x_2), u = (\rho, u_2); \quad (1.8)$$

приводит [7] – [8] модель  $M_0$  к эквивалентной форме – модели  $M_1$  (1.9) – (1.17). Под эквивалентностью моделей  $M_0$  и  $M_1$  понимается, что из уравнений  $M_0$  следуют уравнения  $M_1$  и наоборот - из уравнений  $M_1$  следуют уравнения  $M_0$ .

Модель  $M_1$ :

Опишем движение фазовых переменных  $x = (x_1, x_2)$  под управлением  $u = (\rho, u_2, u_{lr})$  системой уравнений

$$\frac{d}{dt} x_1 = v_1, v_1(x, u, p) = \{P_R - u_2 P\}; \quad (1.9)$$

$$\frac{d}{dt} x_2 = v_2, v_2(x, u, p) = \{u_2 P e^{x_1} - R_R' x_2\}; \quad (1.10)$$

$$\frac{d}{dt} \rho = \{u_{lr} P + \rho(1 - \rho) \frac{\partial}{\partial \rho} P_R\}; \quad (1.11)$$

$$dp = p'(t)dt, p' = \{p'_j(t), j = 1, 2, \dots\}; \quad (1.12)$$

где параметры внешней среды  $p$  имеют вид:

$$p = (\bar{\mu}_s, R_a^0, d_a^0, c_a^0, I_\Phi, T_l, \tilde{\rho}_s); \quad (1.13)$$

с ограничениями  $u \in U(x, p)$  вида:

$$-\{P_R - u_2 P\} \rho \leq \frac{d}{dt} \rho \leq \{P_R - u_2 P\} (1 - \rho); \quad (1.14)$$

$$R'_R x_2 e^{-x_1} \leq u_2 P \leq P_R, \quad (1.15)$$

и начальными значениями

$$x_1(t_0) = \ln M(t_0), x_2(t_0) = 0, \rho(t_0) = \rho^0, p(t_0) = p^0 \in R^{dp}; \quad (1.16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} P_R &= P_R(\rho, p) = P - R, P = P(\rho, p), \\ R &= R(\rho, p) = (1 - \rho)R'_l + \rho R'_r, R'_i = R'_i(p); \\ x_2 &\geq 0, 0 < \rho < 1, 0 \leq u_2 \leq 1 - R/P, \\ P(\rho, p) &> 0, P_R(\rho, p) \geq 0, R'_i(p) > 0, R'_R(p) > 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Модель  $M_2$ .

Для системы (1.9) – (1.17) модели  $M_1$  с постоянными параметрами  $p$  на отрезке времени  $t \in [t_0, T]$  определим терминальный функционал

$$J(u) = x_2(T) \rightarrow \max_u. \quad (1.18)$$

Назовем соотношения системы (1.9) – (1.18) моделью  $M_2$ .

## 2. Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана (HJB)

Для модели  $M_2$  (1.9) – (1.18) рассмотрим совокупность задач

$$\begin{aligned} dx_i &= v_i(x, u, p)dt; t \in T_\tau = [\tau, T], \\ x(\tau) &= x, u \in U(x, p); \\ J_t(u) &= x_2(T) \rightarrow \max_u, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $v_i$  определены в (1.9) – (1.10).

Для каждой задачи из совокупности задач (2.1) определим функцию Беллмана  $V(x, p, t)$  и функции  $H(x, u, p, t)$  при  $t_0 \leq t \leq T$ , [6], следующим образом:

$$V(x, p, t) = \max_{u \in U} x_2(T); \quad (2.2)$$

$$H(x, u, p, t) = \left\{ v_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \right\} + \frac{\partial V}{\partial t}, i = 1, 2. \quad (2.3)$$

Далее предположим, что функция Беллмана достаточно гладкая, т.е. непрерывна и имеет непрерывные частные производные в (2.3). Это допущение будет исследовано в следующей части работы. А пока в защиту этого предположения можно заметить, что функции  $P(\rho, p)$  и  $R'_i(p)$ , определяющие  $v_i(x, u, p)$  в (2.1) гладкие бесконечно дифференцируемые функции в области определения.

Пусть из точки  $X = (x, p, t)$  выходят две траектории: оптимальная траектория  $(x^*(\tau), p, \tau)$ , контролируемая оптимальным управлением  $u^*(\tau) \in U$  при  $\tau \in [t, T]$ , и неоптимальная траектория, контролируемая при  $\tau \in [t, t + \Delta t]$  произвольным допустимым управлением  $u(\tau) \in U$  и контролируемая при  $\tau \in [t + \Delta t, T]$  другим оптимальным управлением  $u^0(\tau) \in U$ . Пусть  $X_1 = (x + \Delta x, p, t + \Delta t)$  начальная точка траектории, контролируемой другим оптимальным управлением  $u^0(\tau) \in U$ .

Таким образом имеется две оптимальные траектории, исходящие из точек  $X$  и  $X_1$  и максимизирующие  $x_2(T)$ . Нетрудно видеть, что функция  $V(x, p, t) = \max_{u \in U} x_2(T)$  из (2.2) определена в каждой точке  $(x, p, t)$  и постоянна вдоль каждой оптимальной траектории, исходящей из  $(x, p, t)$ .

Значения функции  $V$  различны для различных оптимальных траекторий. Пусть точки  $X$  и  $X_1$  лежат на одной траектории дифференциальной системы (1.9) - (1.10), контролируемой управлением  $u(t) \in U$  т.е.  $\Delta x_i = v_i(x, u, p)\Delta t + o(\Delta t)$ .

$$V(x, p, t) = \max_{u[t, T] \in U} x_2(T),$$

$$V(x + \Delta x, p, t + \Delta t) = \max_{u[t + \Delta t, T] \in U} x_2(T).$$

Таким образом, из одной точки  $X = (x, p, t)$  выходит две траектории: оптимальная с функционалом  $V(x, p, t)$  и допустимая неоптимальная с функционалом  $V(x + \Delta x, p, t + \Delta t)$ . Очевидно, функционал  $V(x, p, t)$  оптимальной траектории не меньше функционала неоптимальной траектории. Следовательно,

$$V(x, p, t) \geq V(x + \Delta x, p, t + \Delta t) \text{ или } 0 \geq \Delta V, \quad (2.4)$$

Для системы (2.1) равенство  $0 = \Delta V$  в (4) достигается, если точки  $x + \Delta x$  и  $x$  лежат на одной оптимальной траектории, исходящей из точки  $(x, p, t)$ . Пусть функция  $V(x, p, t)$  имеет необходимые производные:

$$\frac{d}{dt} V(x, p, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \left\{ v_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \right\} + \frac{\partial V}{\partial t},$$

Тогда на оптимальной траектории уравнение НЖВ имеет вид

$$0 = \max_{u \in U} H(x, u, p, t) + V_t, \text{ для } \forall t \in [t_0, T], \text{ где} \quad (2.5)$$

$$H(x, u, p, t) = v_i V_{x_i}, \quad i = 1, 2. \quad (2.6)$$

Здесь и далее запись  $a_i b_i$  обозначает сумму  $\sum a_i b_i$  по  $i$ , в частности  $v_i V_{x_i}$  обозначает  $\sum v_i \frac{\partial V}{\partial x_i}$ .

Введем обозначения

$$\rho^*(p) = \underset{u}{\operatorname{argmax}} P_R(\rho, p), \quad u = (\rho, u_2) \in U(x, p); \quad (2.7)$$

$$P_R^*(p) = P_R(\rho^*(p), p), \quad P^*(p) = P(\rho^*(p), p), \quad (2.8)$$

$$\varphi_1 = -V_{x_1}(x, p, t) + e^{x_1} V_{x_2}(x, p, t), \quad \varphi_2 = -R'_R x_2 V_{x_2}(x, p, t);$$

$$\tau_{11} = \{ \max \tau \mid P_R(\rho(\tau), p) < P_R^*(p), \rho(0) < \rho^*(p), t_0 < \tau \leq t \}.$$

$$\tau_{12} = \{ \max \tau \mid P_R(\rho(\tau), p) < P_R^*(p), \rho(0) > \rho^*(p), t_0 < \tau \leq t \}.$$

$\tau_1$  равно  $\tau_{11}$  или  $\tau_{12}$  в зависимости от начального  $\rho(0)$ .

$$\tau_2 = \{ \tau \mid \varphi_1(x, p, \tau) = 0, \varphi_1(x, p, t) < 0, \tau_1 \leq t < \tau \}. \quad (2.9)$$

$$H(x, u, p, t) = P_R(\rho, p) V_{x_1} + \varphi_1 u_2 P(\rho, p) - R'_R x_2 V_{x_2}, \quad (2.10)$$

так как

$$H = \{ P_R - u_2 P \} V_{x_1} + \{ u_2 P e^{x_1} - R'_R x_2 \} V_{x_2},$$

$$H = P_R V_{x_1} + \{ -V_{x_1} + e^{x_1} V_{x_2} \} u_2 P - R'_R x_2 V_{x_2}, \text{ или}$$

$$H = P_R V_{x_1} + \varphi_1 u_2 P - R'_R x_2 V_{x_2}.$$

Таким образом, требуется найти решение  $V(x, p, t)$  уравнения НЖВ и оптимальные управление  $u^* = (\rho^*, u_2^*)$  и траекторию  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$  для следующей задачи:

$$H(x^*, u^*, p, t) = -V_t(x^*, p, t), \quad \forall t \in [t_0, T]; \quad (2.11)$$

с краевым условием  $V(x^*, p, T) = x_2^*(p, T)$ , где

$$H(x^*, u^*, p, t) = \max_{u \in U} H(x^*, u, p, t) \text{ для } \forall t \in [t_0, T]; \text{ где} \quad (2.12)$$

$$H(x, u, p, t) = P_R(\rho, p) V_{x_1}(x, p, t) + \varphi_1 u_2 P(\rho, p) - R'_R x_2 V_{x_2}(x, p, t), \quad (2.13)$$

для системы уравнений (1.9) – (1.10) с ограничениями  $u \in U(x, p)$  из (1.14) – (1.15) и с начальными значениями (1.16).

### 3. Свойства уравнения НЖВ для модели $M_3$

Заметим, что в выражении гамильтониана

$$\max_{u \in U} H(x, u, p, t) = V_{x_1} \max_{u \in U} \{P_R(\rho, p)\} + \max_{u \in U} \{\varphi_1 u_2 P(\rho, p)\} - R'_R x_2 V_{x_2}$$

от части  $u_2$  управления  $u = (\rho, u_2)$  зависит только член  $\varphi_1 u_2 P(\rho, p)$ , где

$$\varphi_1 = -V_{x_1}(x, p, t) + e^{x_1} V_{x_2}(x, p, t).$$

А) Поскольку всегда  $P(\rho, p) > 0$  максимум  $\max_{u_2} H(x, u, p, t)$  в (2.12) при  $\varphi_1 < 0$  достигается при  $u_2 = 0$ .

В этом случае система (1.9) - (1.10) модели  $M_2$  приобретает вид:

$$\frac{d}{dt} x_1 = P_R(\rho, p), \quad \frac{d}{dt} x_2 = 0; \quad t_0 \leq t \leq \tau_2; \quad (3.1)$$

$$-\rho P_R \leq \frac{d}{dt} \rho \leq (1 - \rho) P_R; \quad (3.2)$$

$$H(x, u, p, t) = P_R(\rho, p) V_{x_1}. \quad (3.3)$$

В самом деле, из неравенства  $R'_R x_2 e^{-x_1} \leq u_2 P$  из (1.15) при  $u_2 = 0$  и  $x_2 \geq 0$  следует  $x_2 = 0$ . Тогда  $\dot{x}_2 = \{u_2 P e^{x_1} - R'_R x_2\}$  из (1.10) влечет  $\dot{x}_2 = 0$ . Равенство  $x_2(t) = 0$  отвечает начальному условию  $x_2(t_0) = 0$  из (1.16).

Оптимальное  $\rho(t)$  для (3.1) – (3.3) определяется как  $\rho(t) = \rho^*(p)$ . Сопряжение оптимального  $\rho(t)$  с начальным значением  $\rho(t_0)$  при  $t \leq t \leq \tau_1$  осуществляется в зависимости от соотношения  $\rho(t_0)$  и  $\rho^*(p)$  решением уравнения  $d\rho/dt = -\rho P_R(\rho, p)$  либо  $d\rho/dt = (1 - \rho) P_R(\rho, p)$  из (3.2).

В) Поскольку всегда  $P(\rho, p) > 0$  максимум  $\max_{u_2} H(x, u, p, t)$  в (2.12) по  $u_2 < 1 - R/P$  при  $\varphi_1 > 0$  достигается при  $u_2 = 1 - R/P$  или  $u_2 P = \{1 - R/P\} P = P_R$ .

В этом случае система (1.9) – (1.10) модели  $M_2$  приобретает вид:

$$\frac{d}{dt} x_1 = 0; \quad \frac{d}{dt} x_2 = \{P_R e^{x_1} - R'_R x_2\}; \quad \tau_2 \leq t \leq T; \quad (3.4)$$

$$\frac{d}{dt} \rho = 0; \quad (3.5)$$

$$H(x, u, p, t) = \{P_R e^{x_1} - R'_R x_2\} V_{x_2}. \quad (3.6)$$

В самом деле, из  $\dot{x}_1 = \{P_R - u_2 P\}$  при  $u_2 P = P_R$  следует  $\dot{x}_1 = 0$ . Также из неравенства (1.14) при  $u_2 P = P_R$  следует  $\dot{\rho} = 0$ . Следовательно, при заданных постоянных параметрах  $p = p(t)$  и постоянном  $\rho(t)$  величины  $P_R = P(\rho, p) - R(\rho, p)$ , а также  $x_1(t)$  и  $R'_R(p)$  постоянны.

Оптимальное  $\rho(t)$  для (3.1) – (3.3) определяется как  $\rho(t) = \rho^*(p)$ .

### 4. Заключение

Исследовано поведение весьма общей модели роста биомасс популяции растений, максимизирующей продуктивность на конечном отрезке времени в условиях постоянной внешней среды. Сформулировано уравнение Беллмана и с его помощью частично описаны оптимальные управления и траектории модели. В последующей части статьи будет найдена функция Беллмана и завершено решение поставленной задачи.

### Литература

1. Полуэктов Р.А. Смоляр Э.И., Терлеев В.В., Тонаж А.Г. Модели продукционного процесса сельскохозяйственных культур. – СПб.: Изд-во СПбУ, 2006. – 396 с.
2. Сиротенко О.Д. Математическое моделирование водно-теплового режима и продуктивности агроэкосистем. – Л.: Гидрометеиздат, 1981. – 176 с.
3. Бихеле З.Н., Молдау Х.А., Росс Ю.К. Математическое моделирование транспирации и фотосинтеза растений при недостатке почвенной влаги. – Л.: Гидрометеиздат, 1980. – 223 с.

4. *Chartier P.* A model of CO<sub>2</sub> assimilation in the leaf // Prediction and measurement of photosynthetic productivity, Ed. I. Setlik. – Wageningen: Pudoc, 307–315, 1970.
5. *Торнли Дж.Г.М.* Математические модели в физиологии растений. Пер. с англ. – Киев: Наук. думка, 1982. – 312 с.
6. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Основы динамического программирования. – Минск: Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1975.
7. *Воротынец А.В.* К построению адаптивной модели растительного покрова // Евразийский Союз Ученых. Серия: технические и физико-математические науки. 2021. Том 1. N 10(91). – С. 47–53. DOI: 10.31618/ESU.2413-9335.2021.1.91.1474.
8. *Воротынец А.В.* О моделировании распределения ассимилятов фотосинтеза растительного покрова // Современная наука: Актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и технические науки. 2022. №3. – С. 55–58. DOI: 10.37882/2223-2966.2022.03.08.