ИЕРАРХИЧЕСКАЯ ИГРА С КООПЕРАТИВНЫМ ПОВЕДЕНИЕМ ИГРОКОВ НИЖНЕГО УРОВНЯ

Горелов М.А.
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия
griefer@ccas.ru

Аннотация. Изучается модель двухуровневой иерархической системы со многими участниками в предположении, что элементы нижнего уровня выбирают оптимальные по Парето исходы. Исследуется два класса игр: без обратной связи и при наличии таковой. Найдены максимальные гарантированные результаты.

Ключевые слова: иерархические игры, максимальный гарантированный результат, оптимальность по Парето.

Введение

Систематическое исследование иерархических игр было начато Ю.Б. Гермейером в конце шестидесятых годов прошлого века [1]. Примерно в то же время близкие по смыслу модели начали исследоваться в теории активных систем [2–3], теории контрактов [4], теории разработки механизмов (mechanism design) [5] и других разделах теории управления.

В настоящее время наиболее изучены модели с двумя участниками: Центром и одним элементом нижнего уровня. Более сложные модели исследуются чаще всего при довольно жестких дополнительных предположениях типа наличия веерной структуры [6] или выполнения гипотезы слабого влияния [7]. Такого рода предположения позволяют достаточно естественным образом свести исследование сложной модели к изучению игры двух лиц, но выполняются далеко не всегда. Причина такого положения дел вполне понятна.

При переходе от игр двух лиц к играм со многими игроками новые принципиальные трудности возникают уже на этапе постановки задачи. В игре двух лиц с правом первого хода у одного из них (Центра) игрок нижнего уровня принимает решение в условиях, когда его выигрыш зависит только от его действий. Поэтому не возникает проблем с тем, чтобы определить, а, значит, и предсказать его рациональное поведение. Как следствие единственным разумным принципом оптимальности является принцип максимального гарантированного результата [1].

В более сложной ситуации даже после того, как Центр выбрал и зафиксировал свою стратегию, приходится анализировать некую игру элементов нижнего уровня. И волей-неволей приходится делать какие-то дополнительные предположения. Чаще всего [3,8,9] принимается гипотеза о том, что игроки нижнего уровня выберут какую-то ситуацию равновесия (по Нэшу, в доминирующих стратегиях и т.д.). Здесь возникают проблемы с существование этих равновесий (что накладывает существенные ограничения на класс рассматриваемых игр), но в целом получающаяся задача и методы ее решения оказываются аналогичными тем, которые связаны с играми двух лиц.

В данном докладе делается другое предположение, позволяющее обобщить принцип максимального гарантированного результата на случай игр многих лиц. А именно, предполагается, что игроки нижнего уровня сумеют как-то договорится и выбрать одну из оптимальных по Парето точек. В решении получающейся задачи появляются новые качественные особенности. Например, в некоторых случаях может оказаться выгодной децентрализация управления. Да и само решение задачи оказывается посложнее, чем анализ игры двух лиц.

Всякое обобщение должно удовлетворять, как минимум, трем условиям. Во-первых, новая теория должна давать те же результаты, что и обобщаемая в тех случаях, когда они обе применимы. Во-вторых, получаемая модель должна быть доступна для анализа. И, в-третьих, результаты исследования не должны противоречить здравому смыслу. Проверке этих условий, в основном, и посвящена данная работа.

1. Управляемая система

Будем рассматривать модель двухуровневой иерархической системы, состоящей из одного выделенного элемента (Центра) и n элементов нижнего уровня. Игроков нижнего уровня будем нумеровать числами $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$. Описываемая далее модель отражает представления Центра об управляемой системе.

Центр выбирает свое управление u из множества U. Игрок с номером $i \in N$ выбирает свое управление v^i из множества V^i.

Цель Центра состоит в максимизации значения функции выигрыша $g: U \times \prod_{i=1}^{n} V^i \to \mathbb{R}$ (здесь, как обычно, имеется в виду декартово произведение множеств, а $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел). Цель игрока i состоит в стремлении увеличить значение функции $h^i: U \times \prod_{i=1}^{n} V^i \to \mathbb{R}$.

Набор $\langle N, U, V^1, V^2, \dots, V^n, g, h^1, h^2, \dots, h^n \rangle$ будем называть игрой Г.

Особая роль Центра состоит в том, что он обладает правом первого хода, то есть он первым выбирает свое управление $u \in U$ и этот выбор становится известным остальным участникам конфликта до того, как они примут собственные решения.

Для сокращения дальнейших формул будем использовать следующую систему обозначений. Набор управлений $(v^1, v^2, \dots, v^n)$ всех игроков нижнего уровня будем обозначать буквой v без индексов. Соответственно, если игроки выберут управления $u \in U$ и $v^i \in V^i, i = 1,2, \dots, n,$ то, например, выигрыш Центра составит $g(u, v)$. Буквой V без индексов будем обозначать декартово произведение $\prod_{i=1}^{n} V^i$.

2. Принцип оптимальности

Дальнейшее исследование будет проводиться с позиций и в интересах Центра. В этих условиях согласно общим методологическим принципам исследования операций следует ориентироваться на гарантированный результат Центра, но при этом учитывать всю имеющуюся у Центра информацию о неопределенности. В описываемой ситуации эта информация может позволить Центру разделить все множество выборов контрагентов V на множество рациональных ответов $BR(u)$ игроков нижнего уровня на выбор стратегии $u \in U$ и множество нерациональных стратегий $V \setminus BR(u)$. Поскольку не рассматривается возможность отказа кого-то из игроков от игры, множество $BR(u)$ следует считать непустым. В этих условиях при выборе стратегии $u \in U$ Центр может гарантированно рассчитывать на получение выигрыша

$$\inf_{v \in BR(u)} g(u, v),$$

а максимальный гарантированный результат Центра составит

$$\sup_{u \in U} \inf_{v \in BR(u)} g(u, v). \quad (1)$$

В классическом случае с одним игроком нижнего уровня проблема решается просто: игрок нижнего уровня принимает решение в условиях, когда его выигрыш зависит только от его собственного выбора и, зная его функцию выигрыша, оценить множество его рациональных ответов не составляет труда. В случае $n > 1$ игроки нижнего уровня принимают решение при неопределенных выборах партнеров. Поэтому, если Центр хочет как-то сузить множество рациональных ответов на свою стратегию, он должен сделать обоснованные предположения об отношении игроков нижнего уровня к этой неопределенности. При этом возможны разные варианты.

В данной статье будем предполагать, что Центр обладает следующей информацией о поведении игроков нижнего уровня. Он знает, что игроки нижнего уровня способны каким-то образом договориться и выбрать одно из оптимальных по Парето решений. Более точно оценить множество рациональных выборов игроков нижнего уровня Центр не может.

Напомним классическое определение. При заданной стратегии $u \in U$ исход $v \in V$ доминирует (по Парето) исход $w \in V$, если для всех $i \in N$ выполняются неравенства $h^i(u, v) \geq h^i(u, w)$ и существует $i \in N$ для которого $h^i(u, v) > h^i(u, w)$.

Из сказанного следует, что можно было бы полагать, что множество $BR(u)$ совпадает с множеством недоминируемых исходов

$$P(u) = \{v \in V | \; \forall w \in V (\exists i \in N: h^i(u, v) > h^i(u, w)) \vee (\forall i \in N h^i(u, v) \geq h^i(u, w))\},$$

и, соответственно, множество $V \setminus BR(u)$ задается условием

$$V \setminus BR(u) = \{w \in V | \exists v \in V (\exists i \in N: h^i(u, v) > h^i(u, w)) \& (\forall i \in N \; h^i(u, v) \geq h^i(u, w))\}.$$

Проблема возникает, если при каких-то $u \in U$ множество $P(u)$ окажется пустым. В этом случае формула (1) будет логически некорректной. Разумеется, стандартные условия непрерывности функций h^i и компактности множества V гарантируют непустоту множества $P(u)$. Но в общем случае, например, для игр с обратной связью, такие условия оказываются слишком ограничительными. Поэтому приходится модифицировать приведенные конструкции. Разумеется, это можно сделать многими способами. Один из наиболее распространенных способов состоит в замене оптимальных решений на «почти» оптимальные. Таким образом, приходим к следующему определению.

Определение 1. Число γ называется гарантированным результатом центра в игре Г тогда и только тогда, когда существуют такие стратегия $u \in U$, положительное число ε и множество $B \subset V$, что

во-первых, существует такое $w \in B$, что для любого $\omega \in V$ существует $i \in N$, для которого $h^i(u,w) > h^i(u,\omega)$, или для всех $i \in N$ выполнены неравенства $h^i(u,w) > h^i(u,\omega) - \varepsilon$;

во-вторых, для любого $v \in B$ справедливо неравенство $g(u,v) \geq \gamma$;

и, в-третьих, для любого $v \in V \backslash B$ существуют такой исход $\varpi \in V$ и такой игрок $i \in N$, что $h^i(u,\varpi) - \varepsilon \geq h^i(u,v)$ и для всех $j \in N$ имеют место неравенства $h^j(u,\varpi) \geq h^j(u,v)$.

Точная верхняя грань R всех гарантированных результатов называется максимальным гарантированным результатом в игре Г.

Возможно, это определение выглядит несколько необычно. Но оценивать ту или иную конструкцию следует не по ее соответствию тем или иным канонам, а по тому, насколько адекватные выводы получаются с помощью построенной модели. Исследованию этого вопроса и посвящена данная статья.

Содержательная интерпретация определения 1 такова. Зная цели игроков нижнего уровня, Центр может как-то оценить множество B их рациональных ответов на любую свою стратегию. Число γ является гарантированным результатом, если при любых рациональных ответах игроков нижнего уровня Центр получает выигрыш, не меньший γ. Поскольку правилами не предусмотрен отказ игроков от игры, множество B не должно быть пустым.

Далее, принимается гипотеза, что рациональными Центр считает «почти» оптимальные по Парето ответы игроков нижнего уровня. «Почти» оптимальными считаются такие ответы, которые если и могут быть улучшены по всем критериям, то лишь совсем немного, то есть на величину, не превосходящую ε. Непосредственно из определения видно, что Центру «выгодно» выбирать величину ε как можно меньшей. Поэтому понятно, что в данном случае придется рассматривать ответы действительно очень близкие к оптимальным по Парето.

Часть приведенных ниже доказательств можно было бы упростить, если бы в определении рассматривались не строго положительные, а только неотрицательные значения ε. Но такое изменение определения делает неадекватным модели с обратной связью. Дело в том, что тогда у Центра появляется «соблазн» умышленно выбирать сильно разрывные стратегии с тем, чтобы уменьшить множество B. Такого рода математические ухищрения вряд ли можно считать применимыми на практике.

3. Игра без обратной связи

Предположим, что игра Г описывает взаимодействие игроков без обратной связи. В таком случае вполне естественно выглядят следующие предположения. Множества $U, V^1, V^2, \ldots, V^n$ будем считать наделенными топологиями и компактными. А функции $g, h^1, h^2, \ldots, h^n$ будем предполагать непрерывными в индуцированной топологии на декартовом произведении $U \times \prod_{i=1}^{n} V^i$.

В этих предположениях справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Максимальный гарантированный результат в игре Г равен

$$R_P = \sup_{u\in U} \inf_{v\in P(u)} g(u,v).$$

Доказательство. Докажем сначала, что $R_P \geq R$. Пусть γ – произвольный гарантированный результат. Фиксируем стратегию $u \in U$ и число ε, существование которых предполагает определение 1. По определению множества $P(u)$ для любого исхода $v \in P(u)$ и любого $\varpi \in V$ или существует такое $i \in N$, для которого $h^i(u,v) > h^i(u,\varpi)$, или для всех $j \in N$ будут выполнены неравенства $h^j(u,v) \geq h^j(u,\varpi)$. Тогда тем более для любого $\varpi \in V$ существует такое $i \in N$, для которого $h^i(u,v) > h^i(u,\varpi)$, или для всех $j \in N$ выполнены неравенства $h^j(u,v) \geq h^j(u,\varpi) - \varepsilon$. Но тогда в силу третьего пункта определения 1 имеет место неравенство $g(u,v) \geq \gamma$.

В силу произвольности $v \in P(u)$ отсюда следует неравенство

$$\inf_{v\in P(u)} g(u,v) \geq \gamma.$$

Тем более

$$\sup_{u\in U} \inf_{v\in P(u)} g(u,v) \geq \gamma.$$

А в силу произвольности γ отсюда вытекает неравенство $R_P \geq R$.

Докажем теперь обратное неравенство $R_P \leq R$.

Фиксируем $\gamma < R_P$. Поскольку γ выбрано произвольно, достаточно доказать, что γ – гарантированный результат.

В силу сделанного предположения о непрерывности функций выигрыша

$$\inf_{v \in P(u)} g(u,v) = \inf_{v \in \overline{P(u)}} g(u,v),$$

где $\overline{P(u)}$ – замыкание множества $P(u)$.

Пусть $u \in U$ выбрано так, что

$$\gamma < \inf_{v \in \overline{P(u)}} g(u,v).$$

Множество $\Lambda(u,\gamma) = \{v \in V | g(u,v) \leq \gamma\}$ – замкнутое подмножество компактного множества V, поэтому оно компактно. Значит, и его образ $C\Lambda(u,\gamma) = \{(h^1(u,v), h^2(u,v), \dots, h^n(u,v))| \in \Lambda(u,\gamma)\}$ тоже компактен. Аналогично, множество $C\overline{P(u)} = \{(h^1(u,v), h^2(u,v), \dots, h^n(u,v))| \in \overline{P(u)}\}$ компактно. Множества $C\Lambda(u,\gamma)$ и $C\overline{P(u)}$ не пересекаются.

Введем в пространстве критериев $\mathbb{R}^n$ метрику ρ так, что

$$\rho\big((h^1, h^2, \dots, h^n), (f^1, f^2, \dots, f^n)\big) = \max_{1 \leq i \leq n} \left|h^i - f^i\right|.$$

В силу сказанного в предыдущем абзаце расстояние

$$d\big(C\Lambda(u,\gamma), C\overline{P(u)}\big) = \min_{h \in C\Lambda(u,\gamma)} \min_{f \in C\overline{P(u)}} \rho(h,f)$$

положительно. Фиксируем положительное ε меньшее $d\big(C\Lambda(u,\gamma), C\overline{P(u)}\big)$.

Положим $B = \{v \in V | g(u,v) \geq \gamma\}$.

В силу классических теорем анализа множество $P(u)$ не пусто (ему принадлежит, например, исход $w \in V$, доставляющий максимум непрерывной функции $\sum_{i=1}^{n} h^i(u,v)$ на компактном множестве V). По построению $P(u) \subset B$. Для любой точки $w \in P(u)$ выполнено условие из первого пункта определения 1.

Второй пункт определения выполнен по построению множества B.

Пусть $v \in V \backslash B$. По построению $v \notin P(u)$, поэтому найдется исход $\varpi \in P(u)$, который доминирует исход v по Парето (годится $\varpi \in V$, доставляющий максимум суммы $\sum_{i=1}^{n} h^i(u,\varpi)$при выполнении ограничений $h^i(u,\varpi) \geq h^i(u,v)$). Тогда $h^i(u,\varpi) \geq h^i(u,v)$), а по построению

$$\rho\Big(\big(h^1(u,v), h^2(u,v), \dots, h^n(u,v)\big), \big(h^1(u,v), h^2(u,v), \dots, h^n(u,v)\big)\Big) \geq d\big(C\Lambda(u,\gamma), C\overline{P(u)}\big) > \varepsilon.$$

Значит, найдется $i \in N$, для которого $h^i(u,\varpi) - \varepsilon > h^i(u,v)$. Следовательно, третий пункт определения 1 выполнен и γ – гарантированный результат.

Лемма доказана.

4. Игра с обратной связью

Обратимся к рассмотрению случая, когда Центр, принимая решение о выборе своего управления, знает управления, выбранные элементами нижнего уровня. Вдобавок мы предусмотрим возможность децентрализации управления путем передачи игрокам нижнего уровня права выбора управлений, номинально принадлежащих Центру, но в определенных пределах, которые устанавливает сам Центр. Для такого «добавка» есть две причины.

Во-первых, это может существенно упростить структуру оптимальной стратегии Центра в рассматриваемой игре. С этим эффектом неоднократно приходилось сталкиваться при анализе игр с неопределенными факторами, но его обсуждение выходит за рамки данной статьи. Эта причина, в значительной степени, носит технический характер.

Вторая причина скорее содержательная. Так организованный процесс децентрализации может быть выгоден всем участникам конфликта. Действительно, Центр, во всяком случае, ничего не теряет, поскольку он всегда может сузить множество своих управлений, в котором игроки нижнего уровня могут осуществлять выбор, до множества, состоящего из одной точки. А элементы нижнего уровня только обретают новые права, отчего их интересы никак не могут пострадать. А сели децентрализация выгодна всем, то трудно запретить игрокам использовать этот процесс, а тем более проконтролировать выполнение этого запрета.

Наиболее естественный способ формализации такого процесса децентрализации приводит к необходимости рассматривать игры с запрещенными ситуациями. Чтобы избежать умножения сущностей, далее использован некий искусственный прием, реализующий ту же идею.

Введем обозначения. Пусть $\Psi(X,Y)$ – класс всех точечно-множественных отображений, ставящих в соответствие каждой точке множества X непустое подмножество множества Y, а $\Phi(X,Y)$ – класс всех функций из множества X в множество Y.

На основе игры $\Gamma = \langle N, U, V^1, V^2, \dots, V^n, g, h^1, h^2, \dots, h^n \rangle$, описывающей «технологическую» сторону управляемой системы, построим игру $\Gamma_* = \langle N, U_*, V_*^1, V_*^2, \dots, V_*^n, g_*, h_*^1, h_*^2, \dots, h_*^n \rangle$, моделирующую сам процесс принятия решений. В ней множества управлений и функции выигрыша имеют специальную структуру, что отражает способ взаимодействия игроков. Наличие этой структуры позволяет получить достаточно содержательные результаты.

Пусть $U_* = \Psi(V,U) \times \Phi(V,U), V_*^1 = V^1, V_*^2 = V^2, \dots, V_*^{n-1} = V^{n-1}, V_*^n = V^n \times U$. Функции выигрыша определим следующим образом. Если выбраны стратегии $u_* = (\tilde{u}, \bar{u}) \in U_*$ (здесь $\tilde{u} \in \Psi(V,U)$, а $\bar{u} \in \Phi(V,U)$), $v_*^n = (v^n, u)$, где $v^n \in V^n$, а $u \in U$, $v_*^1 = v^1, v_*^2 = v^2, \dots, v_*^{n-1} = v^{n-1}$, то выигрыш Центра составит

$$g_*(u_*, v_*^1, v_*^2, \dots, v_*^n) = \begin{cases} g(u, v^1, v^2, \dots, v^n), & \text{если } u \in \tilde{u}(v^1, v^2, \dots, v^n), \\ g(\bar{u}(v^1, v^2, \dots, v^n), v^1, v^2, \dots, v^n) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

а выигрыши игроков нижнего уровня будут равны

$$h_*^i(u_*, v_*^1, v_*^2, \dots, v_*^n) = \begin{cases} h^i(u, v^1, v^2, \dots, v^n), & \text{если } u \in \tilde{u}(v^1, v^2, \dots, v^n), \\ h^i(\bar{u}(v^1, v^2, \dots, v^n), v^1, v^2, \dots, v^n) & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad i = 1,2, \dots n.$$

В таком случае $V_* = \prod_{i=1}^n V_*^i = \prod_{i=1}^n V^i \times U = V \times U$. Соответственно можно писать $v_* = (v_*^1, v_*^2, \dots, v_*^n) = (v^1, v^2, \dots, v^n, u) = (v, u)$.

Интерпретировать эти конструкции можно следующим образом. Центр рассчитывает и действительно будет иметь информацию об управлениях $v = (v^1, v^2, \dots, v^n)$, выбранных игроками нижнего уровня. Эти управления игроки нижнего уровня могут выбирать абсолютно свободно. Но вдобавок Центр предлагает им выбрать управление $u \in U$. Но на этот выбор накладывается следующее ограничение. Если будет выбрано управление $u \in \tilde{u}(v)$, то именно оно будет реализовано на практике. А в противном случае принудительно будет выбрано управление $\bar{u}(v)$. Выигрыши всех игроков зависят от сделанных «физических» выборов и не зависят от процедуры их выбора.

Определение 1 конкретизируется для игры Γ_* следующим образом.

Определение 2. Число γ называется гарантированным результатом центра в игре Γ_* тогда и только тогда, когда существуют такие стратегия $u_* = (\tilde{u}, \bar{u}) \in U_*$, положительное число ε и множество $B \subset V_*$, что

во-первых, существует такое $w_* = (w, u) \in B$, что для любого $\omega_* \in V_*$ существует такое $i \in N$, что $h_*^i(u_*, w_*) > h_*^i(u_*, \omega_*)$, или для всех $i \in N$ выполнены неравенства $h_*^i(u_*, w_*) > h_*^i(u_*, \omega_*) - \varepsilon$;

во-вторых, для любого $v_* \in B$ справедливо неравенство $g_*(u_*, v_*) \geq \gamma$,

и, в-третьих, для любого $v_* \in V_* \backslash B$ существуют такой исход $\varpi_* \in V_*$ и такой игрок $i \in N$, что $h_*^i(u_*, \varpi_*) - \varepsilon \geq h_*^i(u_*, v_*)$ и для всех $j \in N$ имеют место неравенства $h_*^i(u_*, \varpi_*) \geq h_*^i(u_*, v_*)$.

Точная верхняя грань R всех гарантированных результатов называется максимальным гарантированным результатом в игре Γ_*.

Относительно игры Γ будем по-прежнему предполагать, что множества $U, V^1, V^2, \dots, V^n$ наделены топологиями и компактны, а функции $g, h^1, h^2, \dots, h^n$ непрерывны. В игре Γ_* аналогичные предположения, разумеется, могут и не выполняться.

Рассмотрим произвольную стратегию $u_* = (\tilde{u}, \bar{u})$ и определим новую стратегию $(\tilde{u}', \bar{u})$ условием $\tilde{u}'(v) = \tilde{u}'(v) \cup \{\bar{u}(v)\}$). Тогда при любых стратегиях v_* игроков нижнего уровня выигрыши всех игроков при использовании стратегии $(\tilde{u}, \bar{u})$ будут совпадать с выигрышами тех же игроков при использовании стратегии $(\tilde{u}', \bar{u})$. Поэтому можно, не ограничивая общности, рассматривать только такие стратегии $(\tilde{u}, \bar{u})$, для которых $\bar{u}(v) \in \tilde{u}(v)$.

Тогда, если Центр выбрал стратегию такого вида, а $u \notin \tilde{u}(v)$, то выигрыши всех игроков не будут меняться при замене стратегии (v, u) на стратегию $(v, \tilde{u}(v))$. Поэтому, не умаляя общности, можно предполагать, что игроки нижнего уровня всегда выбирают такие стратегии (v, u), что $u \in \tilde{u}(v)$.

В дальнейшем оба эти предположения будем считать выполненными.

Замечание. Из сказанного, в частности, следует, что при разумном выборе стратегий Центра $(\tilde{u}, \bar{u})$ его максимальный гарантированный результат не зависит от функции выбора $\bar{u}$. Это обстоятельство делает выбранный способ формализации менее искусственным, а потому более привлекательным.

Обозначим

$$\Omega(v,\gamma) = \{u \in U | g(u,v) \geq \gamma\}.$$

Пусть γ – гарантированный результат в игре Γ_*. Фиксируем стратегию $u_* = (\tilde{u}, \bar{u})$, число ε, множество $B \subset V_*$ и исход $w_* = (w, u)$, существование которых предусмотрено определением 2.

Рассмотрим стратегию $u_*' = (\tilde{u}', \bar{u})$, в которой $\tilde{u}'(v) = \tilde{u}(v) \cup \Omega(v,\gamma)$ для любого $v \in V$. Покажем, что эта стратегия тоже гарантирует получение результата γ. Для этого нужно указать число ε', множество $B' \subset V_*$ и исход $w_*' = (w', u')$, для которых выполняются условия определения 2.

Положим $\varepsilon' = \varepsilon$, $B' = \{(w,u) | g(u,w) \geq \gamma\}$. Пусть исход (w', u') доставляет максимум суммы $\sum_{i=1}^{n} h^i(u'', w'')$ при ограничениях $(u'', w'') \in B'$, $h^i(u'', w'') \geq h^i(u, w)$ для всех $i \in N$.

Покажем, что для так выбранных u_*', ε', B' и w_*' выполняются все три пункта определения 2.

Исход (w', u') оптимален по Парето на множестве B', поэтому для $\omega_* \in B'$ выполнения первого пункта определения 2 очевидно. Если же $\omega_* \notin B'$, то в силу выбора исхода (w, u) справедливо условие: существует $i \in N$, для которого $h^i(u,w) > h^i(u,\omega)$, или для всех $i \in N$ выполнены неравенства $h^i(u,w) > h^i(u,\omega) - \varepsilon$. А кроме того, $h^i(u', w') \geq h^i(u, w)$ для всех $i \in N$. Значит, и в этом случае первый пункт определения 2 выполнен.

Второй пункт выполняется в силу выбора множества B'.

Наконец, если $v_* \in V_* \setminus B$, то по построению $h_*^i(u_*', v_*) = h_*^i(u_*, v_*)$. А тогда третий пункт определения 2 выполняется в силу того, что для всех $v \in V$ имеет место включение $\tilde{u}(v) \subset \tilde{u}'(v)$.

Таким образом, можно, не умаляя общности, считать, что оптимальная стратегия $(\tilde{u}, \bar{u})$ Центра такова, что $\Omega(v,\gamma) \subset \tilde{u}(v)$ для всех $v \in V$. Далее это предположение считаем выполненным.

Докажем, что тогда для любого $v_* \in V_* \setminus B$ существуют такой исход $\varpi_* \in B'$ и игрок $i \in N$, что $h_*^i(u_*, \varpi_*) - \varepsilon \geq h_*^i(u_*, v_*)$ и для всех $j \in N$ справедливы неравенства $h_*^i(u_*, \varpi_*) \geq h_*^i(u_*, v_*)$.

Поскольку $v_* = (v, u'') \in V_* \setminus B$, выполняется неравенство $g_*(u_*, v_*) = g(u'', v) < \gamma$. А тогда в силу третьего пункта определения 2 существуют такой исход $\varpi_{*1} \in V_*$ и такой игрок $i \in N$, что $h_*^i(u_*, \varpi_{*1}) - \varepsilon \geq h_*^i(u_*, v_*)$ и для всех $j \in N$ имеют место неравенства $h_*^i(u_*, \varpi_{*1}) \geq h_*^i(u_*, v_*)$. Значит, $\sum_{i=1}^{n} h_*^i(u_*, \varpi_{*1}) \geq \sum_{i=1}^{n} h_*^i(u_*, v_*) + \varepsilon$.

Если $\varpi_{*1} \in B'$, то все доказано. В противном случае по аналогичной причине существуют такой исход $\varpi_{*2} \in V_*$ и такой игрок $i \in N$, что $h_*^i(u_*, \varpi_{*2}) - \varepsilon \geq h_*^i(u_*, \varpi_{*1})$ и для всех $j \in N$ имеют место неравенства $h_*^i(u_*, \varpi_{*1}) \geq h_*^i(u_*, v_*)$. В частности,

$$\sum_{i=1}^{n} h_*^i(u_*, \varpi_{*2}) \geq \sum_{i=1}^{n} h_*^i(u_*, \varpi_{*1}) + \varepsilon \geq \sum_{i=1}^{n} h_*^i(u_*, v_*) + 2\varepsilon.$$

Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока это возможно. На шаге k получим исход ϖ_{*k}, для которого $\sum_{i=1}^{n} h_*^i(u_*, \varpi_{*k}) \geq \sum_{i=1}^{n} h_*^i(u_*, v_*) + k\varepsilon$. Поскольку функции h_*^i ограничены, продолжаться бесконечно этот процесс не может. Поэтому на каком-то шаге n получится исход $\varpi_{*n} \in B'$. Очевидно, он и будет искомым.

Для $(u, v) \in U \times V$ положим

$$\Delta(u,v,\gamma) = \{(\varpi, w) \in U \times V | g(\varpi, w) \geq \gamma \& h^i(\varpi, w) \geq h^i(u,v)\},$$

$$\chi(u,v,\gamma) = max_{(\varpi,w) \in \Delta(u,v,\gamma)} max_{1 \leq i \leq n} (h^i(\varpi, w) - h^i(u,v)).$$

Условие «для $(v, u) \in V \times U$ существуют $(w, \varpi) \in B'$ и $i \in N$ для которых $h^i(\varpi, w) - \varepsilon \geq h^i(u,v)$ и $h^j(\varpi, w) \geq h^j(u,v)$ для всех $j \in N$» равносильно неравенству $\chi(u,v,\gamma) \geq \varepsilon$.

Обозначим

$$dom(\Omega,\gamma) = \{v \in V | \Omega(v,\gamma) \neq \emptyset\}.$$

Если $v \in V \setminus \mathrm{dom}(\Omega,\gamma)$ а $u \in \tilde{u}(v)$, то, как установлено выше, $\chi(u,v,\gamma) \geq \varepsilon$. Значит,

$$\inf_{v \in V \setminus dom(\Omega,\gamma)} \max_{u \in U} \chi(u,v,\gamma) \geq \varepsilon, \tag{2}$$

и тем более

$$\inf_{v \in V \setminus dom(\Omega,\gamma)} \max_{u \in U} \chi(u,v,\gamma) > 0. \tag{3}$$

Таким образом, последнее неравенство является необходимым условием того, что число γ является гарантированным результатом в игре Γ_*. Покажем, что это условие является и достаточным.

Пусть неравенство (3) справедливо. Тогда можно выбрать положительное ε так, что будет выполнено условие (2).

Определим стратегию $u_* = (\tilde{u}, \bar{u})$ следующим образом. Если $v \in V \backslash \mathrm{dom}(\Omega, \gamma)$, то выберем значение $\bar{u}(v)$ так, что $\chi(\bar{u}(v), v, \gamma) = \max\limits_{u \in U} \chi(u, v, \gamma)$. А при $v \in \mathrm{dom}(\Omega, \gamma)$ определим значение $\bar{u}(v)$ условием $g(\bar{u}(v), v) = \max\limits_{u \in U} g(u, v)$. Тем самым функция $\bar{u}$ определена при всех $v \in V$. Положим $\tilde{u}(v) = \Omega(v, \gamma) \cup \{\bar{u}(v)\}$. Тогда множество $\tilde{u}(v)$ не пусто при всех $v \in V$.

Пусть $B = \{(w, u) | g(u, w) \geq \gamma\}$, а $w_* = (w, u)$ доставляет максимум сумме $\sum_{i=1}^{n} h^i(u', w')$ на множестве $(u', w') \in B$. Тогда w_* будет доминировать по Парето все исходы (u', w') у которых $w' \in \mathrm{dom}(\Omega, \gamma)$ а $u' \in \tilde{u}(w')$. А тогда по транзитивности в силу неравенства (2) первый пункт определения 2 будет выполнен и для $v \in V \backslash \mathrm{dom}(\Omega, \gamma)$.

Второй пункт этого определения выполнен в силу определения стратегии u_* и множества B.

Пусть теперь $v \in V \backslash \mathrm{dom}(\Omega, \gamma)$. Тогда $\max\limits_{u \in U} \chi(u, v, \gamma) \geq$ ε и в силу выбора стратегии u_* для (единственного) $u \in \tilde{u}(v)$ будем иметь $\chi(u, v, \gamma) \geq$ ε. А это значит, что выполняется и третий пункт определения 2. Следовательно, γ – гарантированный результат.

Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема. Для того, чтобы число γ было гарантированным результатом в игре Γ_* необходимо и достаточно выполнение условия (3).

Попутно была найдена одна из стратегий, гарантирующих получение результата γ (если такой результат вообще можно получить). Ее структура понятна и достаточно характерна для такого рода задач. Центр предлагает игрока нижнего уровня выбрать такой набор управлений, при котором он (Центр) получит выигрыш, не меньший γ. Если игроки нижнего уровня выберут именно такие управления, то они и будут реализованы на практике ко всеобщему удовлетворению. В противном случае Центр использует стратегию наказания и при этом, по крайней мере, один из игроков нижнего уровня получит неудовлетворительный выигрыш.

5. Анализ частных случаев

Рассмотрим несколько частных случаев рассмотренных задач, в которых существуют «естественные» понятия оптимальных решений, с тем, чтобы проанализировать разумность предложенных выше постановок.

Начнем с рассмотрения так называемых веерных систем. Будем рассматривать игры без обратной связи в которых выигрыши всех игроков нижнего уровня зависят от управлений центра и их собственных управлений, но не зависят от управлений других игроков нижнего уровня. Пусть $f^i: U \times V^i \to \mathbb{R}$ – такие функции, что $h^i(u, v^1, v^2, \ldots, v^n) \equiv f^i(u, v^i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

В таком случае если Центр выбрал свое управление u и довел информацию о сделанном выборе до игроков нижнего уровня, то каждый из них, принимая решение, находится в ситуации, когда его выигрыш зависит только от его собственного выбора. Если его цели действительно описываются стремлением к максимизации значения $f^i(u, v^i)$, то естественно считать, что игрок i выберет свое управление из множества

$$BR^i(u) = \left\{v \in V \,\middle|\, f^i(u, v^i) = \max_{w^i \in V^i} f^i(u, w^i)\right\}.$$

Все управления из этого множества для игрока i равноценны, поэтому уточнить его выбор для Центра невозможно. Следовательно, с гарантией он может рассчитывать на результат

$$R_f = \sup_{u \in U} \min_{v \in BR^{\times}(u)} g(u, v),$$

где $BR^{\times}(u) = \prod_{i=1}^{n} BR^i(u)$.

В силу леммы 1 максимальный гарантированный результат в смысле определения 1 равен R_P. Непосредственно из определения оптимальности по Парето в данном случае $P(u) = BR^{\times}(u)$. Значит, $R_f = R_P$.

Таким образом, в данном честном случае предлагаемые в данной статье конструкции дают вполне разумный результат.

Если обратиться к игре с обратной связью, то сделанных в данном разделе предположений о структуре функций выигрыша уже недостаточно для того, чтобы сформулировать естественное понятие оптимального поведения игроков. В самом деле, если фиксирована стратегия Центра достаточно общего вида, то «физический» выбор управления Центра u, а с ним и выигрыш одного игрока нижнего уровня в общем случае зависят от выборов остальных игроков нижнего уровня. Поэтому, обращаясь к игре с обратной связью, придется ограничиться случаем одного игрока нижнего уровня, то есть положить $n = 1$.

Оказывается, что в таком случае децентрализация управления теряет смысл, то есть если γ – гарантированный результат, то найдется такая стратегия $u_* = (\tilde{u}, \bar{u})$, гарантирующая получение этого результата, что при всех v множество $\tilde{u}(v)$ состоит из одной точки и, как показано выше, тогда можно считать, что $\tilde{u}(v) = \{\bar{u}(v)\}$.

Действительно, пусть γ – гарантированный результат и его получение гарантирует стратегия $(\tilde{u}', \bar{u}')$ такого вида, как описано при доказательстве теоремы. Выберем соответствующее число ε и множество $B \subset V_*$. Положим $\bar{u}(v) = \bar{u}'(v)$ и пусть $\tilde{u}(v) = \{\bar{u}'(v)\}$ при всех $v \in V$. Тогда все условия определения 2.

Действительно, выберем $w \in V$ так, что

$$h^1(\bar{u}(w), w) > sup_{v \in V} h^1(\bar{u}(v), v) - \varepsilon.$$

В силу выбора функции $\bar{u}$ можно, не ограничивая общности, считать, что $w \in B$. А тогда стратегия $w_* = (w, \bar{u}(w))$ удовлетворяет первому пункту определения 2.

Если $v_* \in B$, то по построению $g_*(u_*, v_*) \geq g_*(u_*', v_*) \geq \gamma$. Значит, выполнен и второй пункт определения.

А если $v_* \in V_* \backslash B$, то существует такой исход $\varpi_* \in V_*$, что $h_*^1(u_*', \varpi_*) - \varepsilon \geq h_*^1(u_*', v_*) = h_*^1(u_*, v_*)$. Поэтому выполнен и третий пункт.

Таким образом, построенная стратегия $u_* = (\tilde{u}, \bar{u})$ – искомая.

Ввиду сказанного определение 1 в случае $n = 1$ можно переформулировать следующим образом.

Лемма 2. Число γ является гарантированным результатом центра в игре Γ_* тогда и только тогда, когда существуют такие функция $\bar{u} \in \Phi(V, U)$, число $\varepsilon > 0$ и множество $B \subset V$, что

во-первых, существует такое $w \in B$, что для любого $\omega \in V$ выполнено неравенство $h^1(\bar{u}(w), w) > h^1(\bar{u}(\omega), \omega) - \varepsilon$;

во-вторых, для любого $v \in B$ справедливо неравенство $g(\bar{u}(v), v) \geq \gamma$,

и, в-третьих, для любого $v \in V \backslash B$ существуют такой исход $\varpi \in V$, что имеет место неравенство $h^1(\bar{u}(\varpi), \varpi) - \varepsilon \geq h^1(\bar{u}(v), v)$.

В [10] для случая игры с одним игроком нижнего уровня было предложено определение максимального гарантированного результата, которое может быть переформулировано следующим образом.

Определение 3. Число γ называется гарантированным результатом центра в игре Γ_* тогда и только тогда, когда существуют такие функция $\bar{u} \in \Phi(V, U)$, число $\varepsilon \geq 0$ и множество $B \subset V$, что

во-первых, существует такое $w \in B$, что для любого $\omega \in V$ выполнено неравенство $h^1(\bar{u}(w), w) \geq h^1(\bar{u}(\omega), \omega) - \varepsilon$;

во-вторых, для любого $v \in B$ справедливо неравенство $g(\bar{u}(v), v) \geq \gamma$,

и, в-третьих, для любого $v \in V \backslash B$ существуют такой исход $\varpi \in V$, что имеет место неравенство $h^1(\bar{u}(\varpi), \varpi) - \varepsilon \geq h^1(\bar{u}(v), v)$.

Точная верхняя грань R всех гарантированных результатов называется максимальным гарантированным результатом в игре Γ_*.

В [10] показано, что это определение равносильно классическому определению Ю.Б. Гермейера [1].

Как видно, разница состоит в том, что условие $\varepsilon > 0$ заменяется условием $\varepsilon \geq 0$ и, соответственно строгое неравенство в первом пункте меняется на нестрогое. В общем случае это очень существенно. Но в случае $n = 1$ определения 2 и 3 оказываются равносильными. Докажем это.

Если число γ является гарантированным результатом в смысле определения 2, то оно будет гарантированным результатом и в смысле определения 3. Это следует непосредственно из сравнения формулировок леммы 2 и определения 3. Остается доказать обратное (строго говоря, будет доказано чуть более слабое утверждения, но этого будет достаточно для того, чтобы убедиться, что максимальные гарантированные результаты в обоих случаях совпадают).

Пусть γ – гарантированный результат в смысле определения 3 и ему соответствуют функция $\bar{u} \in \Phi(V, U)$, число $\varepsilon \geq 0$, множество $B \subset V$ и управление $w \in B$, существование которых предусмотрено определением 3. Если $\varepsilon > 0$, то выполнение условий леммы 2 проверяется непосредственно и все доказано. Остается рассмотреть случай $\varepsilon = 0$.

В этом случае функция $h^1(\bar{u}(v), v) \in \Phi(V, \mathbb{R})$ достигает максимума (например, в точке w) и множество B состоит из всех точек максимума этой функции. Пусть λ – значение этого максимума.

Фиксируем произвольное число $\gamma' < \gamma$ и покажем, что оно является гарантированным результатом в смысле определения 2.

Очевидно,

$$L = max_{v\in V} min_{u\in U} h^1(u, v) \leq max_{v\in V} h^1(\bar{u}(v), v) = \lambda.$$

Определим функцию $\bar{u}^p$ условием $h^1(\bar{u}^p(v), v) = \min_{u\in U} h^1(u, v)$.

Рассмотрим два случая.

Пусть сначала $L < \lambda$. Положим

$$\bar{u}'(v) = \begin{cases} \bar{u}(w), \text{если } v = w, \\ \bar{u}^p(v) \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

$\varepsilon' = \lambda - L, B' = \{w\}, w' = w$.

Первые два условия из леммы 2 для так определенных $\bar{u}', \varepsilon', B'$ и w' выполняются очевидным образом. А если $v \in V \backslash B'$, то

$$h^1(\bar{u}'(v), v) = h^1(\bar{u}^p(v), v) = min_{u\in U} h^1(u, v) \leq L = \lambda - \varepsilon' = h^1(\bar{u}(w), w) - \varepsilon'.$$

Следовательно, и третье условие выполнено. Значит, γ – гарантированный результат и тем более γ' является таковым.

Пусть теперь $L = \lambda$. Тогда

$$B = \{v \in V | min_{u\in U} h^1(u, v) = L\}.$$

Следовательно, множество B замкнуто.

Зафиксируем функцию $\bar{u}^p$, удовлетворяющую условиям $h^1(\bar{u}^p(v), v) = \min_{u\in U} h^1(u, v)$ и $g(\bar{u}^p(v), v) = \min_{u\in E(v)} g(u, v)$, где

$$E(v) = \{u \in U | h^1(u, v) = min_{u\in U} h^1(u, v)\}.$$

Тогда для всех $v \in V$ выполняется условие $h^1(\bar{u}(v), v) = \min_{u\in U} h^1(u, v)$. Пусть

$$\bar{u}'(v) = \begin{cases} \bar{u}(v), \text{если } v \in B, \\ \bar{u}^p(v) \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда функция $f(v) = h^1(\bar{u}'(v), v) = \min_{u\in U} h^1(u, v)$ будет непрерывной на всем множестве V, а функция $\varphi(v) = g(\bar{u}'(v), v) = \min_{u\in E(v)} g(u, v)$ будет полунепрерывной снизу на открытом множестве $V \backslash B$.

Рассмотрим множество $\Lambda(\gamma') = \{v \in V | g(\bar{u}'(v), v) \leq \gamma'\}$ и замкнуто, а, следовательно, компактно. Значит, достигается максимум $\max_{v\in\Lambda(\gamma')} h^1(\bar{u}'(v), v)$. Множество $\Lambda(\gamma')$ не пересекается с множеством B и потому $\max_{v\in\Lambda(\gamma')} h^1(\bar{u}'(v), v) < L$. Положим $\varepsilon' = L - \max_{v\in\Lambda(\gamma')} h^1(\bar{u}'(v), v)$.

Пусть $B' = V \backslash \Lambda(\gamma')$ и $w' = w$.

Для выбранного w' первое условие леммы 2 выполняется при любом положительном ε'. Второе условие выполнено в силу выбора множества B', а третье – в силу выбора ε'. Следовательно, γ' – гарантированный результат в смысле определения 2.

Подведем итоги. Если γ – гарантированный результат в смысле определения 3, то любое число $\gamma' < \gamma$ будет гарантированным результатом в смысле определения 2. Но тогда максимальный гарантированный результат в смысле определения 2 не может быть меньше γ. В силу произвольности γ отсюда следует, что максимальный гарантированный результат в смысле определения 3 не превосходит максимального гарантированного результата в смысле определения 3. Как отмечено выше, обратное тоже верно. Значит, эти максимальные гарантированные результаты попросту совпадают. Это – серьезный аргумент в пользу исследуемых в данной статье конструкций.

Игры с одним игроком нижнего уровня в известном смысле исключительны. При $n > 1$ использование точечно-множественных отображений осмысленно, поскольку может быть выгодно Центру. Приведем пример.

Пример. Пусть $n = 2, U = \{-1,1\}, V^1 = V^2 = \{0,1\}$, а функции выигрыша определяются равенствами $g(u, v^1, v^2) = v^1 + v^2$, $h^1(u, v^1, v^2) = 2v^1 + uv^1v^2$ и $h^2(u, v^1, v^2) = 2v^2 - uv^1v^2$. Рассмотрим соответствующую игру с обратной связью.

В этом примере множества U, V^1, V^2 конечны. Поэтому на множествах U_*, V_*^1, V_*^2 можно задать топологии так, что эти множества будут компактны, а функции выигрыша g_*, h_*^1, h_*^2 будут непрерывными. Поэтому применима лемма 1.

С учетом этого несложно проверить, что стратегии, удовлетворяющие условию $u_*(1,1) = \{-1,1\}$ гарантируют Центру выигрыш, равный 2, а все остальные стратегии позволяют ему получить с гарантией лишь выигрыш, равный 1.

6. Заключение

Итак, в статье предложен новый принцип оптимальности для двухуровневых иерархических игр многих лиц.

Полученные результаты позволяют утверждать, что в тех частных случаях, когда можно говорить о существовании «естественных» понятий оптимального решения, новый принцип оптимальности приводит именно к этим решениям.

Задача поиска максимального гарантированных результатов и оптимальных стратегий в рассматриваемых случаях оказываются технически сложнее, чем в случаях игр двух лиц или при использовании равновесий. Тем не менее, они вполне доступны для исследования. Характер статьи не позволил акцентировать внимание на некоторых технических тонкостях. Но возникающие в связи с ними проблемы удается решить.

Структура оптимальных решений оказывается вполне интерпретируемой. В ходе решения удается выявить новое качественное явление – целесообразность децентрализации управления. Оно выглядит вполне естественно, хотя и не очевидно.

На основании сказанного можно утверждать, что предложенный принцип оптимальности вполне может быть применен при моделировании реальных иерархических систем. Разумеется, вопрос об адекватности получающейся модели, каждый раз должен решаться конкретно.

Литература

1. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976. – 327 с.
2. *Бурков В.Н.* Основы математической теории активных систем. – М.: Наука, 1977. – 255 с.
3. *Бурков В.Н., Еналеев А.К., Коргин Н.А.* Согласованность и неманипулируемость механизмов организационного управления: текущее состояние проблемы, ретроспектива, перспективы развития теоретических исследований // Автоматика и телемеханика. 2021. N 7. – С. 5–37.
4. *Laffont J.J., Martimort D.* The theory of incentives: the principal-agent model. – Princeton: Princeton university press, 2009. – 440 p.
5. *Myerson R.B.* Incentive compatibility and the bargaining problem // Econometrica. – 1979. – Vol. 47. N 1. – P. 61–73.
6. *Горелик В.А., Кононенко А.Ф.* Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. – М.: Радио и связь, 1982. – 144 с.
7. *Еналеев А.К.* Согласованные механизмы управления в активных системах // Управление большими системами. 2020. Вып. 83. – С. 5–28.
8. *Горбанева О.И., Угольницкий Г.А.* Теоретико-игровой анализ взаимодействия экономических агентов в олигополии Курно с учетом линейной структуры, «зеленого» эффекта и заботы о справедливости // Математическая теория игр и ее приложения. 2023. Т. 15. Вып. 1. – С. 3–47.
9. *Basar T., Olsder G.J.* Dynamic noncooperative game theory. – Philadelphia: SIAM, 1999. – 519 p.
10. *Горелов М.А.* Максимальный гарантированный результат в иерархических играх // Управление большими системами. 2017. Вып. 67. – С. 4–31.