БАЛАНСИРОВАНИЕ ПЛАНОВ АКТИВНЫХ ПОДСИСТЕМ

Ерешко Ф.И.
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,
Москва, Россия
fereshko@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются проблемы принятия решений в модели взаимодействия игроков в двухуровневой организационной системе. Ставится задача согласования запросов Центра и откликов систем в общем случае линейных зависимостей. Сформулированы условия баланса в случаях гарантированного согласования и возможной благожелательности всего производства. Приводятся схемы решения указанных задач и доказательства реализации.

Ключевые слова: организация, система, Центр, игры, не противоположные интересы, системный анализ, модели, балансы, процедура, алгоритм.

Введение

Развитие экономики в современных условиях определяется несколькими принципиальными обстоятельствами, не в последнюю очередь взрывным характером порождения новых числовых данных, что определило этап цифровизации и предопределяет активное использование информационных технологий и математического моделирования, поскольку построение алгоритмов для числового анализа экономических процессов невозможно без формальных моделей.

Принятие решений в экономике, как в общественной системе производства, распределения и потребления благ, опирается на основные положения процедур принятия решений в теории исследования операций: описание множества возможных выборов (стратегий), устремлений активных экономических агентов (цели), принципов оптимальности (имитация, оптимизация).

В целом, хозяйственные системы обладают следующими свойствами: динамичность, неопределённость и неконтролируемость, многокритериальность и иерархичность.

Система управления любого сложного хозяйственного комплекса принципиально имеет иерархическую структуру: Центр -подсистемы. Эта структура формируется в течение длительного времени и отражает сложные социально-экономические отношения. В частности, невозможность обработки информации в одном месте при государственном регулировании экономических централизованных систем приводит к децентрализации в обработке информационных потоков, делегированию прав принятия локальных решений на нижние уровни при централизованном принятии глобальных, стратегических решений. В рыночной экономике при распределенных правах собственности задачи государственного регулирования имеют такую же структуру, можно говорить о модели планирования в смешанной экономике.

Поэтому в целях прогноза развития экономики необходимо уметь решать задачу организации согласованного проведения расчетов на системе моделей различной степени агрегированности с учетом реально действующих механизмов взаимодействия между разными уровнями иерархической системы.

Конечно, иерархическая организация не является исключительной особенностью хозяйственных комплексов - такой подход к структурированию приложим к самым разнообразным системам - коммерческим предприятиям, комплексам вычислительных программ, социальному устройству, электронному оборудованию и т.п.

Впечатляющий прогресс в развитии систем управления в технической сфере был порождён значительными успехами естественнонаучных дисциплин, выработавших методологию познания на основе идеи моделирования. Подобные технологии разработаны и в системах управления экономическими процессами. Так, один из выводов теории управления гласит: Рыночная экономика – это децентрализованная система управления взаимодействием экономических агентов в обществе, и она не может решить все проблемы социально-экономического развития общества. Необходимо рациональное государственное регулирование.

Настоящая работа возникла под влиянием идей сибирской группы исследователей, где рассматривались особенности реакции блока экономики на приоритетные стратегии Центра [2].

Рассматривается взаимодействие центрального планирующего органа Π_0 и комплекса из n взаимосвязанных отраслей народного хозяйства.

Данные задачи, относящиеся к моделированию процессов и принятию решений в организационных системах, имеющих иерархический характер, и связанные с распределением ресурсов, назначением цен, выбором стимулирующих механизмов подробно рассматривались в работах [1-3].

Здесь рассматривается проблема сочетания общего случая взаимодействия механизма централизованного задания выходных параметров производственной системы и производства, действующего в рамках его технологических возможностей.

1. Постановка задач

Пусть управление центра состоит из выбора векторов $\{u_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, компонентами которых являются плановые задания по выпуску производимых отраслью основных видов продукции. Множество Z_i возможных состояний определяется как множество допустимых наборов интенсивностей применяемых технологических способов. Так же как и в задачах распределения ресурсов, мы будем полагать, что совокупность векторов заявок на продукцию других отраслей формируется каждой отраслью из решения соответствующей задачи линейного программирования

$$\min(c_i, z_i) = \min \sum_{p=1}^{m_i} \sum_{r=1}^{R_{ip}} c_{ip}^r z_{ip}^r$$

при условиях

$$\sum_{p=1}^{m_i} \sum_{r=1}^{R_{ip}} d_{ipt}^r z_{ip}^r \geq u_{it}, \; t = 1, \ldots, T_i,$$

$$\sum_{r=1}^{R_{ip}} l_{ip}^r z_{ip}^r \leq L_{ip}, \; p = 1, \ldots, m_i,$$

$$z_{ip}^r \geq 0, \; p = 1, \ldots, m_i, \; r = 1, \ldots, R_{ip},$$

где $z_{ip}^{\,r}$ – интенсивность применения r-го технического способа на p-м предприятии i-ой отрасли, $d_{ipt}^{\,r}$ – норматив выпуска продукции t-го вида на p-м предприятии при применении r-й технологии с единичной интенсивностью, $c_{ip}^{\,r}$ – приведенные затраты, $l_{ip}^{\,r}$ – трудоемкость при применении r-й технологии с единичной интенсивностью, L_{ip} – наличные трудовые ресурсы на p-м предприятии, u_{it} – плановое задание по производству t-го вида продукции для всей отрасли.

Предполагается, что запрос формируется, как оператор промежуточного продукта, имея общий линейный вид: $v_{ik} = \sum_{p=1}^{m_i} \sum_{r=1}^{R_{ip}} a_{ip}^{kr} z_{ip}^r$, так что соответствующее отображение $u_i \rightarrow V_i\left(\hat{z}_i, \hat{z}_i \in \hat{Z}_i\right)$, где $\hat{z}_i = \operatorname{Arg} \min c_i(z_i)$, может быть неоднозначным. Следовательно, неоднозначным может быть оператор промежуточного продукта комплекса отраслей в целом

$$P(u) = \sum_{i=1}^{n} V_i\left(z_i\right),$$

где $u = (u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$ – вектор входов в многоотраслевую систему, составленный из входов в каждую отрасль.

В этих условиях центр должен принять дополнительную гипотезу для оценки баланса плановых заданий и запросов в продуктах.

Указанная гипотеза позволит формально записать условие такой совокупности плановых заданий для отраслей, которая в случае ее выполнения была бы достаточной для обеспечения выпуска продукции, покрывающей потребность в продуктах этого комплекса со стороны всего народного хозяйства.

Если зафиксировать величину конечного продукта $y \geq 0$, то в рамках гарантированного подхода условие баланса имеет вид

$$\min_{v \in P(u)} \left(u - P(u)\right) \geq y,$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} u_{ik} \geq \sum_{i=1}^{n} v_{ik}(u_i) + y_k, \; k = 1,\ldots,N,$$

при всех

$$v_i(u_i) \in V_i(\hat{z}_i), \; i = 1,\ldots,n.$$

Далее, если такой баланс выполним не единственным образом, центр может стремиться к достижению следующей цели, например, к минимизации загрязнения

$$\min \sum_{i=1}^{n} \mu_i \sum_{p=1}^{m_i} \sum_{r} b_{ip}^{lr} z_{ip}^{r}.$$

Однако такое трактование балансировки планов может оказаться слишком ограничительным и можно рассмотреть другую гипотезу: благожелательности, полагая, что баланс имеет место, когда соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} u_{ik} \geq \sum_{i=1}^{n} v_{ik}(u_i) + y_k, \; k = 1,\ldots,N$$

выполнимо хотя бы при одном значении $v_i \in V_i$. Затем, как и в предыдущем случае, можно стремиться к минимизации того или иного функционала, например, суммарного загрязнения.

В рассмотренных случаях центр фактически добивается двух лексикографически упорядоченных целей: первый – качественный, т.е. стремится в том или в ином смысле обеспечить баланс, и второй – количественный, в данном случае, уменьшения загрязнения.

2. Формализация

Таким образом, здесь рассматривается игра Γ_1 с запрещенными ситуациями, в которой области совместных допустимых выборов у игроков различны. Игрок 1 выбирает управление $u \in \mathrm{D} \subset E^k$. Зная это управление, игрок 2 делает выбор, $x \in X(u) = \{x \in E^n | Ax = b + Bu, \; x \geq 0\}$, максимизируя свою функцию выигрыша $(\boldsymbol{c},\boldsymbol{x})$. Игроку 1 необходимо, чтобы выбор второго игрока принадлежал множеству $G = \{x \in E^n | (g_i, x) \geq q_i, \; i = 1,\ldots,l\}$. Если такие выборы игрока 2 существуют, то игрок стремиться максимизировать на них свою (g_o, x) функцию выигрыша. Здесь $c, g_0, g_1, \ldots, g_l \in E^n$; $b \in E^m$; A – $(m\times n)$ матрица, имеющая ранг m; B – $(m\times k)$ матрица; D – многогранное множество, задаваемое системой неравенств.

В соответствии с двумя упомянутыми выше гипотезами рассмотрим две постановки:

а) **неблагожелательный нижний уровень**; здесь задача записывается в виде: найти

$$\max_{u \in \mathcal{D} \cap T'} \; \min_{x \in X_c(u)} (g_0, x), \text{ где}$$

$$X_c(u) = \{x \in X(u) | (c, x) = \max_{y \in X(u)} (c, y)\},$$

$$X(u) = \{x \in E^n | Ax = b + Bu, \; x \geq 0\},$$

$$T' = \{u \in T | X_c(u) \subset G\}, \; T = \{u \in E^k | X(u) \neq \varnothing\}.$$

б) **благожелательный нижний уровень**; здесь задача записывается в виде: найти

$$\max_{u \in \mathcal{D} \cap T''} \; \max_{x \in X_c(u) \cap G} (g_0, x), \text{ где}$$

$$T' = \{u \in T | X_c(u) \cap G \neq \varnothing\}.$$

Идея отыскания наибольшего гарантированного результата верхнего уровня в данном случае аналогична идее, использованной при построении алгоритмов распределения ресурсов. Вначале строится множество допустимых выборов верхнего уровня в том смысле, что оптимальные решения задачи нижнего уровня удовлетворяют дополнительным ограничениям, а затем на этом множестве находится наибольшее значение критерия верхнего уровня.

3. Теорема

Приведём описание Теоремы об оптимальном распределении ресурсов, которая далее используется при обосновании предлагаемых схем решения задач.

Сформулированные выше задачи при распределении центром некоторого ресурса могут быть записаны в общем виде:

найти

$$\max_{u\in\mathcal{D}}(\min_{x\in T(u)}\sum_{j=1}^{n}k_j x_j)=\max_{u\in\mathcal{D}}F(u),$$

где

$$T(u)=\left\{x|x\in T_{\mathbf{0}}(u),\ \sum_{j=1}^{n}c_j x_j=\max_{y\in T_0(u)}\sum_{j=1}^{n}c_j y_j\right\}$$

$$T_{\mathbf{0}}(u)=\left\{x|x\in E^n, x\geq 0,\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i+\sum_{l=1}^{k}b_{il}u_l,\ i=1,\dots,m\right\}$$

$$\mathcal{D}=\left\{u|u\in E^n,\ u\geq 0,\ \sum_{l=1}^{k}d_{rl}u_l\leq d_r,\ r=1,\dots,p\right\}$$

Введем в рассмотрение функцию $F_0(u)=\sum_{j=1}^{u}k_j x_j$, где $x\in T(u)$**.** Эту функцию можно определить не при всех значениях $u\in E^k$, так как $T(u)$ может быть пустым множеством. В частности, если при всех значениях u вышеприведенная задача не имеет решений, то $F_o(u)$ вообще не определена. Далее будем считать, что существует $u_o\in$ D такое, что $T(u_o)\neq 0$ и $T(u_o)$ – ограниченное множество. Если $T(u)$ содержит более одного элемента, то функция $F_o(u)$ может принимать несколько значений.

Введем также обозначение: $F(u)=\min_{x\in T(u)}F_{\mathbf{0}}(u)$.В работе использована Теорема, которая позволяет перейти от максиминной задачи к оптимизационной.

Теорема. Существует $\delta_0>0$ такое, что при всех δ, $0<\delta<\delta_0$, функция $F_0^{\delta}=\sum_{j=1}^{n}k_j x_j$, где $x\in T^{\delta}(u)$, однозначна, и $F(u)=F_0{}^{\delta}(u)$,

$$T^{\delta}(u)=\{x\mid x\in T_0(u),\ \sum_{j=1}^{n}(c_j-\delta k_j)x_j=\max_{y\in T_0(u)}\sum_{j=1}^{n}(c_j-\delta k_j)y_j\}$$

4. Принципиальные схемы и обоснования

4.1. Принципиальная схема алгоритма при неблагожелательном нижнем уровне

Зафиксируем некоторое значение величины δ (смысл которой будет пояснен ниже).

Шаг 1. Определим множество базисов $\left\{J_1,J_2,\dots,J_{R_1}\right\}$ задачи

$$[(c,x)-\delta\,(g_1,x)\,]\to\max$$
$$Ax=b+Bu,\ x\geq 0,$$

области оптимальности которых покрывают множество $\mathcal{D}\cap T$. Определим также набор непустых множеств $\mathcal{D}^1,\dots,\mathcal{D}^{R_1}$

$$\mathcal{D}^r=T_{J_r}\cap\mathcal{D}\{x\in E^k,(g_1,x^{J_r}(u)\geq q_1\},$$

и обозначим $\mathcal{D}_1 = \bigcup_{r=1}^{R_1} \mathcal{D}^r$.

Шаг t (t = 2, ... , l) . Проводим процедуру, аналогичную шагу 1 для множества $\mathcal{D}_{t-1} \bigcap T$ и функционала $[(c, x) - \delta\,(g_t, x)\,]$. Определяем множество D_t.

Шаг l+1. Определяем множество базисов $J_1, J_2, \ldots, J_R$ задачи

$$[(c, x) - \delta\,(g_0, x)\,] \to \max$$
$$Ax = b + Bu,\ x \geq 0,$$

области оптимальности которых покрывают множество $\mathcal{D}_l \bigcap T$. Для каждого базиса определяем величину

$$f_r = \max_{u \in T_{J_r} \bigcap \mathcal{D}_l} (g_0, x^{J_r}(u))$$

Обозначим $W = \max_{1 \leq r \leq R} f_r$.

Покажем, что наибольший гарантированный результат верхнего уровня при неблагожелательности нижнего уровня равняется W.

Отметим, что на шаге 1 выделяется множество параметров u, при которых оптимальные решения второго игрока удовлетворяют первому из дополнительных ограничений.

Это следует из Теоремы, если рассмотреть (g_1, x) как функцию выигрыша верхнего уровня. Согласно Теореме существует некоторое конечное значение δ_1, такое, что при решении задачи линейного программирования определяется минимальное значение (g_1, x) на множестве оптимальных решений нижнего уровня. Следовательно, при любом $u \in \mathcal{D}^r$ все остальные решения задачи нижнего уровня удовлетворяют первому из дополнительных ограничений, и при $u \notin \mathcal{D}^r$, $u \in T_{J_r} \bigcap \mathcal{D}$ существует решение нижнего уровня, при котором первое из дополнительных ограничений нарушается.

На шаге t (t = 2, ... , l) выделяется множество параметров, где гарантируется выполнение дополнительных неравенств при некотором значении $\delta_t > 0$.

На шаге l+1 определяется наибольший результат верхнего уровня на множестве оптимальных решений нижнего уровня при гарантированном выполнении всех дополнительных условий.

Величина δ, которая фигурирует в описании схемы, определяется из условия справедливости применения Теоремы на всех шагах ($\delta = \min \delta_t$).

4.2. Принципиальная схема алгоритма при благожелательном нижнем уровне

Фиксируем некоторое конечное $\delta > 0$.

Шаг 1. Определяем множество базисов задачи $\{J_1, J_2, \ldots, J_{R_1}\}$

$$[(c, x) - \delta\, z\,] \to \max$$
$$Ax = b + Bu,\ z \leq (g_i, x) - q_i,\ i = 1, \ldots, l,\ x \geq 0,$$

области оптимальности которых покрывают множество $\mathcal{D} \bigcap T$.

Определяем набор непустых множеств $\mathcal{D}^1, \ldots, \mathcal{D}^{R_1}$

$$\mathcal{D}^r = T_{J_r} \bigcap \mathcal{D} \bigcap x \in E^k, z^{J_R}(u) \geq 0\}$$

Обозначим $\mathcal{D}_1 = \bigcup_{r=1}^{R_1} \mathcal{D}^r$.

Шаг 2. Определим множество базисов $J_1, J_2, \ldots, J_R$ задачи

$$[(c, x) - \delta\,(g_0, x)\,] \to \max$$
$$Ax = b + Bu,\ (g_i, x) \geq q_i,\ i = 1, \ldots, l,\ x \geq 0,$$

области оптимальности которых покрывают множество D_1. Для каждого базиса J_r определяем величину

$$f_r = \max_{u \in T_{J_r} \cap \mathfrak{D}_1} (g_0, x^{J_r}(u))$$

Обозначим $W_\delta = \max_{1 \le r \le R} f_r$.

Покажем, что наибольший гарантированный результат верхнего уровня при благожелательности нижнего уровня равняется W_δ.

В соответствии с Теоремой на шаге 1 определяется множество параметров $\mathbf{D_1}$, при которых среди оптимальных решений нижнего уровня существует решение, удовлетворяющее всем дополнительным ограничениям. Действительно, оптимальное значение

$$z^{opt} = \max_{x \in X_c(u)} \min_{1 \le i \le l} [(g_i, x) - q_i],$$

поэтому при $z^{opt} < 0$ будет нарушаться одно из дополнительных ограничений.

На шаге 2 определяется наибольшее значение функции выигрыша верхнего уровня на построенном множестве параметров.

5. Заключение

В отличие от разработанного алгоритма для ресурса [3-5] здесь требуется использовать некоторую величину δ. Поэтому при любом конкретном значении δ остается открытым вопрос о степени близости полученного результата к искомому. На практике в таком случае делают расчеты для серии $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_N$, и анализируют полученные результаты.

В настоящее время разветвлённый экономический комплекс характеризуется централизованным стратегическим управлением и учётом экономических целей производства. Такой организационной структуре адекватно соответствуют модели принятия решений с иерархической структурой, широкий спектр которых был разработан в ВЦ ФИЦ ИУ РАН в рамках информационной теории иерархических систем [1,3].

Разрабатываемые модели производственных отношений ориентированы на реализацию процедур согласования решений на этапе стратегического планирования, и формирования планов-графиков и их корректировки на уровне всего экономического комплекса.

Литература

1. *Гермейер Ю. Б.* Игры с непротивоположными интересами / С предисловием Н.Н. Моисеева — М.: Наука, 1976. — 328 с
2. *Аганбегян А.Г., Багриновский К.А., Гранберг А.Г.* Система моделей народно-хозяйственного планирования, М., Мысль, 1972, – 351 с.
3. *Ерешко Ф.И.* Математические модели и методы принятия согласованных решений в активных иерархических системах. Диссертация на соиск. уч. степени докт. наук. ИПУ РАН, 1998. – 324 с.
4. *Ерешко Ф.И., Злобин А.С.* Оптимизация линейной формы на эффективном множестве. // Труды IIВсесоюзного семинара “Численные методы нелинейного программирования”. – Харьков, 1976. – С. 167–171.
5. *Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б.* Новые направления в линейном программировании, М., Сов. радио, 1966, – 524 с.