ДИНАМИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ С ОБУЧЕНИЕМ

Павлов О.В.
Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Самара, Россия
pavlov.ov@ssau.ru

Аннотация. Рассмотрены задачи динамической оптимизации производственной деятельности в процессе которой происходит обучение работников. Получены аналитические решения сформулированных задач оптимального управления с применением принципа максимума Понтрягина для моделей научения произвольного вида. Найдены оптимальные стратегии по выбору оптимальных объемов производства и работы.

Ключевые слова: производственная деятельность, обучение, принцип максимума Понтрягина, трудоемкость, производительность, оптимальные стратегии.

Введение

В процессе производственной деятельности на промышленных предприятиях работники приобретают опыт, что отражается на их профессиональном мастерстве: уменьшается время на выполнение производственных операций, увеличивается производительность труда.

В иностранной научной литературе обучение в процессе работы (learning by doing) получило название эффекта кривой обучения. Этот эффект в производственной деятельности обнаружил авиационный инженер Т. Райт [1]. Наиболее полные обзоры различных эмпирических моделей кривых обучения приводятся в иностранных научных публикациях [2–4]. Все эти модели получены в результате статистической обработки данных наблюдений за производственной деятельностью. В литературе представлены два типа моделей. Первый тип моделей описывает динамическую зависимость затрат времени работников на производство единицы продукции (трудоемкости продукции) от кумулятивного объема выпуска продукции. Второй тип моделей описывает динамическую зависимость объема производимой продукции в единицу времени (производительности труда) от кумулятивного времени работы. Модели кривых обучения представляют собой степенные, экспоненциальные, логистические, гиперболические и другие функции.

Обучение в процессе деятельности (приобретение индивидуального опыта) исследуется в различных науках: педагогике, психологии, эргономике, теории управления [5–9]. Представленные в этих публикациях математические модели получены как на основе экспериментальных данных, так и аналитическим путем на основе постулирования различных предположений о структуре, функциях и свойствах обучаемого объекта. В работе [10] рассматривается анализ различных аналитических моделей итеративного научения. Под итеративным научением понимается процесс получения индивидуального опыта с многократным повторением действий при постоянных внешних условиях для достижения определенной цели. В работах [11–13] приводятся модели технологии и опыта, обобщающие известные модели итеративного научения.

Динамическое изменение характеристик производственной деятельности: трудоемкости продукции и производительности труда делает актуальными динамические оптимизационные задачи. Задачи заключаются в распределении объёмов производства или объемов работы по периодам производственной деятельности при выполнении производственных ограничений с целью максимизации (минимизации) критерия оптимизации. Решения таких задач позволят менеджменту производственных предприятий снизить трудовые и производственные затраты, увеличить объем производства продукции.

Для решения динамических оптимизационных задач применяется метод динамического программирования Беллмана и принципа максимума Понтрягина. В публикациях [14–16] приводятся постановки и численные решения задач динамической оптимизации деятельности с обучением в дискретной форме с применением динамического программирования Беллмана.

Использование принципа максимума Понтрягина для решения динамических оптимизационных задач с непрерывным временем позволяет находить аналитические решения. В работах [17–18] автором представлены аналитические решения для задач оптимального управления производственной деятельностью для конкретных моделей научения.

В данной работе найдены аналитические решения динамических оптимизационных задач с моделью научения произвольного вида, что является важным для установления общих стратегий и принципов управления производственной деятельностью на промышленном предприятии.

1. Постановка задачи минимизации суммарного темпа прироста трудовых затрат на производство продукции

Изменение кумулятивного объёма производства описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = u(t), \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

где $x(t)$ – кумулятивный объём производства в физических единицах в момент времени t, $u(t)$ – объём производства в физических единицах в момент времени t, T – конечный момент времени (горизонт планирования).

В начальный момент времени известен объем уже произведенной продукции:

$$x(0) = x_0. \tag{2}$$

К конечному моменту времени должен быть произведен заданный объем продукции R:

$$x(T) = x_0 + R. \tag{3}$$

В каждый момент времени на объём производства наложены следующие ограничения:

$$0 < u(t) \le x_0 + R - x(t). \tag{4}$$

В качестве критерия оптимальности рассматривается минимизация суммарного темпа прироста трудовых затрат на производство продукции $C(t)$:

$$\tilde{J} = \int_0^T \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} dt \to min. \tag{5}$$

Под трудовыми затратами понимается количество времени, затраченное рабочими на производство объема продукции $u(t)$ в момент времени t.

Утверждение.

Для положительной и абсолютно непрерывной функции $C(t)$ максимизация (минимизация) функционала:

$$\tilde{J} = \int_0^T \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} dt, \tag{6}$$

эквивалентна максимизации (минимизации) функционала:

$$J = \int_0^T ln\, C(t)\, dt. \tag{7}$$

Доказательство утверждения.

Проинтегрируем функционал (6). Сделаем замену переменной:

$$z = C(t),$$

тогда

$$dz = \dot{C}(t) dt.$$

Вычислим интеграл:

$$\int_0^T \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} dt = \int_{C(0)}^{C(T)} \frac{dz}{z} = ln\, C(T) - ln\, C(0). \tag{8}$$

Таким образом максимизация (минимизация) функционала (8) эквивалентна максимизации (минимизации) разницы значений логарифмической функции $C(t)$ в конечный и начальный моменты времени.

Введем функцию $g(t)$:

$$g(t) = ln\, C(t) - ln\, C(0). \tag{9}$$

Рассмотрим график функции $z = g(t)$ в прямоугольной системе координат, в которой по оси абсцисс отложено время t, а по оси ординат z – функция $z = g(t)$. В соответствии с формулой (9) для функции $z = g(t)$ выполняются следующие начальное и конечные условия:

$$g(0) = 0. \tag{10}$$

$$g(T) = ln\, C(T) - ln\, C(0). \tag{11}$$

Вариант А: значение функционала $\tilde{J}$ положительное, выполняется условие:

$$g(T) > g(0).$$

В данном варианте функция $g(t)$ является возрастающей, её график располагается в первой четверти координатной плоскости. Согласно выражению (8) максимизация (минимизация) функционала (6) имеет геометрический смысл максимизации (минимизации) высоты прямоугольника $S_{\text{пр}}$, образованного слева осью ординат, сверху – прямой $z = g(t)$, снизу – осью абцисс, справа – прямой t=T.

Площадь прямоугольника $S_{\text{пр}}$ определяется, как произведение длины T и высоты $g(T)$:

$$S_{\text{пр}} = Tg(T). \tag{12}$$

Так как время T является постоянной величиной, из выражения (12) следует, что максимизация (минимизация) высоты прямоугольника эквивалентна максимизации (минимизации) площади прямоугольника $S_{\text{пр}}$. Площадь криволинейного треугольника $S_{\text{тр}}$, образованного сверху функцией $z = g(t)$, снизу – осью абцисс, справа – прямой t=T определится:

$$S_{\text{тр}} = \int_0^T g(t)dt. \tag{13}$$

Найдем отношение площадей прямоугольника $S_{\text{пр}}$ и криволинейного треугольника $S_{\text{тр}}$. Рассмотрим два случая, когда конкретная функция $g(t)$ реализует две траектории $g_1(t)$, $g_2(t)$ и принимает в конечный момент времени значения $g_1(T)$ и $g_2(T)$. Для определенности положим, что в конечный момент времени выполняется условие:

$$g_2(T) = mg_1(T), \tag{14}$$

где m – положительный коэффициент, $m > 0$.

Начальные условия для функций одинаковые:

$$g_1(0) = g_2(0) = 0. \tag{15}$$

Граничные условия (14), (15) для функций $g_1(t)$ и $g_2(t)$ будут выполнены, если будет выполняться равенство:

$$g_2(t) = mg_1(t). \tag{16}$$

Отношение площадей прямоугольника $S_{1\text{пр}}$ и криволинейного треугольника $S_{1\text{тр}}$ с учетом (12) и (13) запишется:

$$\frac{S_{1\text{пр}}}{S_{1\text{тр}}} = \frac{Tg_1(T)}{\int_0^T g_1(t)dt} \tag{17}$$

Отношение площадей прямоугольника $S_{2\text{пр}}$ и криволинейного треугольника $S_{2\text{тр}}$ определится аналогично:

$$\frac{S_{2\text{пр}}}{S_{2\text{тр}}} = \frac{Tg_2(T)}{\int_0^T g_2(t)dt} \tag{18}$$

Подставим в (18) формулы (14), (16) и выполним преобразования с учетом формулы (17):

$$\frac{S_{2\text{пр}}}{S_{2\text{тр}}} = \frac{mTg_1(T)}{m\int_0^T g_1(t)dt} = \frac{Tg_1(T)}{\int_0^T g_1(t)dt} = \frac{S_{1\text{пр}}}{S_{1\text{тр}}} = k, \tag{19}$$

где k – постоянный коэффициент.

Таким образом отношение площадей прямоугольника $S_{\text{пр}}$ и криволинейного треугольника $S_{\text{тр}}$ есть постоянная величина k. А следовательно площадь прямоугольника пропорциональна площади криволинейного треугольника:

$$S_{пр} = kS_{тр}. \tag{20}$$

Подставим в равенство (20) формулы (12), (13) с учетом (9), (11):

$$T(ln\, C(T) - ln\, C(0)) = k \int_0^T (ln\, C(t) - ln\, C(0))\, dt. \tag{21}$$

Перепишем (21) с учетом выражения (8):

$$\int_0^T \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} dt = \frac{k}{T} \int_0^T ln\, C(t)\, dt - \frac{k}{T} \int_0^T ln\, C(0)\, dt. \tag{22}$$

Так как время T, коэффициент k и начальное условие $\ln C(0)$ являются постоянными величинами, из выражения (22) следует, что максимизация (минимизация) функционала (6) эквивалентна максимизации (минимизации) функционала (7). Утверждение доказано.

Вариант Б: значение функционала $\tilde{J}$ отрицательное, выполняется условие:

$$g(T) < g(0).$$

В данном случае функция $g(t)$ является убывающей, её график располагается в четвертой четверти координатной плоскости. Сведем вариант Б к рассмотренному ранее варианту А.

Задача о максимизации отрицательной разницы значений убывающей функции $-g(t)$ в конечный и начальный моменты времени:

$$\max_{t \in [0,T]} \{-\tilde{J}\} = -\int_0^{\mathrm{T}} \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} dt = g(T) - g(0) < 0,$$

будет эквивалента задаче минимизации положительной разницы значений возрастающей функции $g(t)$ в конечный и начальный моменты времени:

$$\min_{t \in [0,T]} \{\tilde{J}\} = \int_0^T \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} dt = g(0) - g(T) > 0.$$

График возрастающей функции $g(t)$ будет располагаться в первой четверти координатной плоскости. Таким образом задача свелась к случаю А. Геометрическая интерпретация в случае А заключается в максимизации высоты прямоугольника, а в случае Б в минимизации высоты этого же прямоугольника. Утверждение доказано.

Вариант С: значение функционала $\tilde{J}$ постоянное, выполняется условие:

$$g(T) = g(0).$$

В этом случае выполняется тождественное равенство:

$$\int_0^T \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} dt = \int_0^T ln\, C(t)\, dt = 0.$$

Следовательно, максимизация (минимизация) функционала (6) эквивалентна максимизации (минимизации) функционала (7). Утверждение доказано.

На основе доказанного утверждения в качестве критерия оптимальности примем эквивалентный критерий: минимизацию суммарной логарифмической функции трудовых затрат (7).

Трудовые затраты на изготовление продукции определяются как произведение трудоемкости продукции $c\big(x(t)\big)$ и объёма производства $u(t)$:

$$C(t) = c(x(t))u(t). \tag{23}$$

Рассматривается динамическая модель трудоемкости произвольного вида:

$$c(x(t)) = c_{пр} + \big(c_0 - c_{пр}\big) f(\beta e^{-\alpha x(t)}), \tag{24}$$

где $c_{пр}$ – предельное значение трудоемкости, c_0 – начальное значение трудоемкости, α – скорость обучения, $f(\beta e^{-\alpha x(t)})$ – функция, зависящая от кумулятивного объема производства $x(t)$, скорости научения α и параметра β.

В соответствии с динамической моделью (24) трудоемкость продукции уменьшается с увеличением кумулятивного объема производства $x(t)$.

Запишем функционал (7) с учетом выражения для функции трудовых затрат (23):

$$J = \int_0^T ln[c(x(t))u(t)]\,dt. \quad (25)$$

Задача оптимального управления заключается в поиске оптимальных объёмов производства $u(t)$, удовлетворяющих ограничению (4), которые осуществляют перевод динамического процесса (1) из начального состояния (2) в конечное состояние (3) и минимизируют критерий (25).

2. Решение задачи минимизации суммарного темпа прироста трудовых затрат на производство продукции

Для решения сформулированной динамической задачи (1)–(4), (25) применим принцип максимума Понтрягина.

Функция Гамильтона будет иметь вид:

$$H(t, x, \psi, u) = \psi(t)u(t) - ln[c(x(t))] - ln[u(t)], \quad (26)$$

где $\psi(t)$ – вспомогательная переменная.

Найдем максимум гамильтониана по управлению:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0. \quad (27)$$

Из условия (27) определим оптимальное управление:

$$u(t)^{opt} = \frac{1}{\psi(t)}. \quad (28)$$

Система сопряженных уравнений запишется:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\psi}; \\ \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\dot{c}_x(x(t))}{c(x(t))}. \end{cases} \quad (29)$$

Симметрическая форма системы (29) примет вид:

$$dt = \psi dx = \frac{c(x(t))}{\dot{c}_x(x(t))} d\psi. \quad (30)$$

Найдем общее решение второго дифференциального уравнения системы (30):

$$\psi = \frac{1}{C_1} c(x(t)). \quad (31)$$

где C_1 – постоянная интегрирования, которая определяется из граничных условий (2) и (3).

Из формулы (31) следует, что сопряженная переменная прямо пропорциональна трудоемкости производства.

Подставим (31) в (28) и получим формулу для оптимального управления:

$$u(t)^{opt} = \frac{C_1}{c(x(t))}. \quad (32)$$

Из формулы (32) можно сделать вывод: оптимальные объемы производства обратно пропорциональны трудоемкости продукции.

Подставим оптимальное управление (32) в дифференциальное уравнение (1):

$$\frac{dx^{opt}}{dt} = \frac{C_1}{c(x(t))}. \quad (33)$$

Общее решение дифференциальное уравнения будет иметь вид:

$$F\left(x^{opt}(t)\right) = C_1 t + C_2, \quad (34)$$

где $F(x(t)$ – неопределенный интеграл функции $c(x(t))$, для которого выполняется равенство на отрезке $[0, T]$:

$$\frac{dF(x(t))}{dx} = c\left(x(t)\right).$$

Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2 из граничных условий (2) и (3):

$$C_1 = \frac{1}{T}[F(x_0 + R) - F(x_0)]. \quad (35)$$

$$C_2 = F(x_0). \quad (36)$$

С учетом (35), (36) общее решение дифференциальное уравнения (33) примет вид:

$$F\left(x^{opt}(t)\right) = F(x_0) + \frac{t}{T}[F(x_0 + R) - F(x_0)]. \quad (37)$$

Формула (37) определяет оптимальную траекторию кумулятивного объема производства продукции.

Оптимальное управление (32) с учетом (35) запишется:

$$u(t)^{opt} = \frac{1}{T}\frac{F(x_0) - F(x_0 + R)}{c(x(t))}. \quad (38)$$

Значение критерия (25) при выборе оптимальных объемов производства (38) будет иметь вид:

$$J^{opt} = \int_0^T ln[c(x(t))u^{opt}(t)]\,dt = Tln\left(\frac{F(x_0+R) - F(x_0)}{T}\right).$$

Подставим оптимальное управление (38) в формулу для трудовых затрат на производство продукции (23):

$$C^{opt}(t) = \frac{1}{T}[F(x_0 + R) - F(x_0)]. \quad (39)$$

Из полученной формулы (39) следует: трудовые затраты на изготовление продукции при выборе оптимальных объемов производства являются постоянной величиной на всем горизонте планирования.

3. Постановка задачи максимизации суммарного темпа прироста объема производства продукции

Изменение кумулятивного объема работ, выполненного рабочими, описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{dy}{dt} = v(t), \;\; t \in [0, T], \quad (40)$$

где $y(t)$ – кумулятивный объем работ, под которым понимается кумулятивное количество времени в часах, затраченного рабочими на производство продукции в момент времени t, $v(t)$ – объем работ в момент времени t, T – конечный момент времени (горизонт планирования).

В начальный момент времени известно количество уже затраченного рабочими времени на работу:

$$y(0) = y_0. \quad (41)$$

К конечному моменту времени объем работ должен быть равен заданному:

$$y(T) = y_0 + Q. \quad (42)$$

где Q – заданный объем работ.

В каждый момент времени на объём работ наложены следующие ограничения:

$$0 < v(t) \leq y_0 + Q - y(t). \quad (43)$$

В качестве критерия оптимальности рассматривается максимизация суммарного темпа прироста объема производства $u(t)$:

$$\tilde{J} = \int_0^T \frac{\dot{u}(t)}{u(t)}dt \to max. \quad (44)$$

На основе доказанного утверждения в качестве критерия оптимальности примем эквивалентный критерий: максимизацию суммарной логарифмической функции объема производства $u(t)$:

$$J = \int_0^T ln[u(t)]\,dt. \quad (45)$$

Объем производства в момент времени t определяется как произведение производительности труда рабочих $w(y(t))$ и объема работ $v(t)$:

$$u(t) = w(y(t))v(t). \quad (46)$$

Рассматривается модель производительности труда произвольного вида:

$$w(y(t)) = w_{пр} + \left(w_0 - w_{пр}\right) f\left(\beta e^{-\alpha y(t)}\right), \tag{47}$$

где $w_{пр}$ – предельное значение производительности труда, w_0 – начальное значение производительности труда, α – скорость научения, $f\left(\beta e^{-\alpha y(t)}\right)$ – функция, зависящая от кумулятивного объема работ $y(t)$, скорости научения α и параметра β.

В соответствии с динамической моделью (47) производительность труда $w(y(t))$ увеличивается с увеличением кумулятивного объема работ $y(t)$.

Запишем функционал (45) с учетом формулы для объема производства (46):

$$J = \int_0^T ln[w(y(t))v(t)]\, dt. \tag{48}$$

Задача оптимального управления заключается в поиске оптимальных объемов работ $v(t)$, удовлетворяющих ограничению (43), которые осуществляют перевод динамического процесса (40) из начального состояния (41) в конечное состояние (42) и максимизируют критерий (48).

4. Решение задачи максимизации суммарного темпа прироста объема производства продукции

Для решения сформулированной задачи (40)–(43), (48) применим принцип максимума Понтрягина. Гамильтониан запишется:

$$H(t, y, \psi, v) = \psi(t)v(t) + ln[w(y(t))] + ln[v(t)]. \tag{49}$$

Определим оптимальное управление из условия максимума гамильтониана по управлению (49):

$$v(t)^{opt} = -\frac{1}{\psi(t)}. \tag{50}$$

Система сопряженных уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\psi}; \\ \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\dot{w}_y(y(t))}{w(y(t))}. \end{cases} \tag{51}$$

Запишем симметрическую форму системы (51):

$$dt = -\psi dy = -\frac{\dot{w}(y(t))}{w(y(t))} d\psi. \tag{52}$$

Общее решение второго дифференциального уравнения системы (52) будет иметь вид:

$$\psi(t) = \frac{1}{C_3} w(y(t)). \tag{53}$$

где C_3 – постоянная интегрирования.

Подставим (53) в (50) и получим формулу для оптимального управления:

$$v(t)^{opt} = -\frac{C_3}{w(y(t))}. \tag{54}$$

Из выражения (54) следует вывод: оптимальный объем работ обратно пропорционален производительности труда.

Подставим оптимальное управление (54) в дифференциальное уравнение (40):

$$\frac{dy^{opt}}{dt} = -\frac{C_3}{w(y(t))}. \tag{55}$$

Общее решение дифференциальное уравнения будет иметь вид:

$$L\left(y^{opt}(t)\right) = -C_3 t + C_4, \tag{56}$$

где $L(y(t)$ – неопределенный интеграл функции $w(y(t))$, для которого выполняется равенство на отрезке $[0, T]$:

$$\frac{dL(y(t))}{dy} = w\left(y(t)\right).$$

Определим постоянные интегрирования C_3 и C_4 из граничных условий (41) и (42):

$$C_3 = -\frac{1}{T}[L(y_0+Q) - L(y_0)]. \tag{57}$$

$$C_4 = L(y_0). \tag{58}$$

С учетом (57), (58) общее решение дифференциальное уравнения (40) запишется:

$$L\left(y^{opt}(t)\right) = L(y_0) + \frac{t}{T}[L(y_0+Q) - L(y_0)]. \tag{59}$$

Формула (59) определяет оптимальную траекторию кумулятивного объема работ, который выполняют рабочие.

Оптимальное управление (54) с учетом выражения для постоянной интегрирования C_3 (57) запишется:

$$v(t)^{opt} = \frac{1}{T}\frac{L(y_0+Q)-L(y_0)}{w(y(t))}. \tag{60}$$

Значение критерия (45) при выборе оптимального объема работ (60) будет иметь вид:

$$J^{opt} = \int_0^T ln[w(y(t))v^{opt}(t)]\,dt = Tln\left(\frac{L(y_0+Q)-L(y_0)}{T}\right).$$

Подставим оптимальное управление (60) в формулу для объема производства продукции (46):

$$u^{opt}(t) = \frac{1}{T}[L(y_0+Q) - L(y_0)]. \tag{61}$$

Из полученной формулы (61) следует вывод: объем производства продукции при выборе оптимальных объемов работы является постоянной величиной на всем горизонте планирования.

5. Заключение

В работе сформулированы и решены две задачи оптимального управления производственной деятельностью с непрерывным временем. Сформулированные задачи были решены аналитически с помощью принципа максимума Понтрягина для моделей научения произвольного вида.

Первая задача заключалась в поиске оптимальных объемов производства при ограничении на кумулятивный объем производства с целью минимизации суммарного темпа прироста трудовых затрат. Задача минимизации суммарного темпа прироста трудовых затрат была сведена к эквивалентной задаче минимизации суммарной логарифмической функции трудовых затрат. Найдена стратегия выбора оптимальных объемов производства для модели трудоемкости произвольного вида: оптимальные объемы производства обратно пропорциональны трудоемкости продукции. Доказано, что при выборе оптимальных объемов производства трудовые затраты на изготовление продукции являются постоянной величиной на всем горизонте планирования.

Вторая задача состояла в поиске оптимального объема работы при ограничении на кумулятивный объем работы с целью максимизации суммарного темпа прироста объема производства. Задача максимизации суммарного темпа прироста объема производства была сведена к эквивалентной задаче максимизации суммарной логарифмической функции объема производства. Найдена стратегия выбора оптимального объема работы для модели производительности труда произвольного вида: оптимальный объем работы обратно пропорционален производительности труда. Доказано, что при выборе оптимального объема работы объем производства продукции является постоянной величиной на всем горизонте планирования.

Литература

1. *Wright T.P.* Factors affecting the cost of airplanes // Journal of the aeronautical sciences. – 1936. – Vol. 3, N 4. – P. 122–128.
2. *Badiru A.B.* Computational survey of univariate and multivariate learning curve models // IEEE Transactions on Engineering Management. – 1992. – Vol. 39, N 2. – P. 176–188.
3. *Anzanello M.J., Fogliatto F.S.* Learning curve models and applications: Literature review and research directions // International Journal of Industrial Ergonomics. – 2011. – Vol. 41, N 5. – P. 573–583.
4. *Learning Curves: Theory, Models, and Applications* / edited by Mohamad Y. Jaber. – Boca Raton: CRC Press, 2011. – 476 p.
5. *Bryan W.L., Harter N.* Studies on the telegraphic language. The acquisition of a hierarchy of habits // Psychol. Rev. – 1899. Vol. 6, N 4. – P. 345–375.
6. *Guthrie E.R.* The psychology of learning. – Rev. ed. – Gloucester, Mass.: Harper and Broth. Pub., 1960. – 310 p.

7. *Зараковский Г.М.* Введение в эргономику / Г.М. Зараковский, Б.А. Королев, В.В. Медведев, П.Я. Шлаен. – М.: Советское радио, 1974. – 352 с.
8. *Новиков А.М.* Процесс и методы формирования трудовых умений: Профпедагогика. – М.: Высшая школа, 1986. – 288 с.
9. *Присняков В.Ф.* Математическое моделирование переработки информации оператором человеко-машинных систем / В.Ф. Присняков, Л.М. Приснякова – М.: Машиностроение, 1990. – 248 с.
10. *Новиков Д.А.* Закономерности итеративного научения. – М.: ИПУ РАН, 1998. – 77 с.
11. *Белов М.В.* Модели технологий / М.В. Белов, Д.А. Новиков – М.: Ленанд, 2019. – 160 с.
12. *Белов М.В.* Управление жизненными циклами организационно-технических систем. / М.В. Белов, Д.А. Новиков – М.: Ленанд, 2019. – 384 с.
13. *Белов М.В., Новиков Д.А.* Модели опыта. // Проблемы управления. 2021. N 1. – С. 43–60.
14. *Новиков Д.А*. Модели обучения в процессе работы. // Управление большими системами. 2007. N 19. – С. 5–22.
15. *Павлов О.В.* Численное решение задачи планирования производства при динамическом снижении трудоемкости. // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. 2012. N 6 (37). – С. 126–132.
16. *Павлов О.В.* Численное решение динамических задач планирования объемов производства в проектах освоения новой продукции // Вестник Самарского университета. Экономика и управление. 2017. N 4. – С. 7–19.
17. *Павлов О.В.* Аналитическое исследование проблемы планирования производственной деятельности в проектах освоения новой продукции. // Экономические науки. 2017. N 12 (157). – С. 30–36.
18. *Pavlov O.V.* Dynamic models of production planning with continuous time in projects of new products development // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. 1096. – P. 012180.