# ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЗАДАЧЕ С ДВУМЯ ГАЗОВЫМИ МЕСТОРОЖДЕНИЯМИ

**Скиба А.К.**
*Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия*
a.k.skiba@mail.ru

*Аннотация. Строится модель эксплуатации двух газовых месторождений. Управлением динамическим процессом осуществляется за счет строительства новых скважин. Ставится задача оптимального управления в классической формулировке. Для ее решения используется принцип максимума Понтрягина. Подробно исследован специальный режим оптимального управления. Выявляем ключевые аспекты такого управления.*

*Ключевые слова: модель эксплуатации газовых месторождений, прикладная задача оптимального управления, оптимизация дисконтированного дохода, принцип максимума Понтрягина.*

## Введение

Россия — одна из крупнейших и богатейших экономик мира. Ее территория огромна и простирается она на многие тысячи километров. Наша страна богата разнообразными природными ресурсами, которые в значительных количествах содержатся в недрах земли. В их числе особое место занимает природный газ [1]. Мы посвящаем эту работу построению модели газовых месторождений, постановке и решению практической задачи оптимального управления.

Прогнозировать реальную добычу газа из залежи, опираясь только на процессы, проходящие внутри пласта, можно на период около трех месяцев. Прогноз на более длительный период приведет нас к серьезным ошибкам в добыче газа. Необходимо пересмотреть подход к построению модели на достаточно длительный период, что и было сделано в работах [2-4]. Модель предполагает ряд упрощений: равенство дебитов всех скважин; равномерное покрытие залежи сеткой скважин; мгновенный ввод в эксплуатацию только что разбуренной скважины.

Данный подход опирается на сохранение материального баланса. В нашем случае сохранению материального баланса подвергаются запасы газа. Модель основана на предположении о пропорциональности между изменениями среднего дебита скважин и текущей добычей природного газа. Модель прошла пробную численную реализацию на реальных примерах и получила высокую оценку.

Автор настоящей статьи совместно со своим соавтором решил проблему максимизации накопленной добычи при ограничении на пропускную способность трубопроводов. Данная работа связана с другой важной задачей: максимизация длины полки [5, 6]. Интересно отметить, что решение последней задачи определятся порядком ввода месторождений. Однако можно выбрать такой порядок, который приведет к минимизации длины полок. При этом он однозначно определен.

Принцип максимума Понтрягина с учетом различных его интерпретаций является основой для решения практических задач такого типа [7, 8]. Применить принцип максимума можно при условии существования оптимального решения таких задач. Для этого мы используем соответствующую теорему из монографии [9].

В отличие от ранее исследованных задач в настоящей статье решается задача с учетом коэффициента дисконтирования.

## 1.Построение модели, постановка и решение оптимизационной задачи

### 1.1. Общая информация

Мы даем описание модели разработки двух газовых месторождений. Основное свойство модели базируется на взаимном влиянии добычи газа со скважин друг на друга.

Вводим следующие обозначения для двух газовых месторождений ($1 \leq i \leq m = 2$):

- постоянная величина $T$означает период планирования;
- переменная величина $t$ означает текущий момент времени, который заключается в промежутке от нуля до фиксированного значения $T$;
- переменная $Q_i(t)$ обозначает добычу газа в текущий момент из $i$-ой залежи;
- фазовая переменная $q_i(t)$ обозначает среднее количество газа, извлекаемое скважиной из $i$-ой залежи в момент времени $t$, что является средним дебитом скважины;

- фазовая переменная $N_i(t)$ обозначает фонд скважин, используемый в данный момент для извлечения газа из $i$-ой залежи;
- переменная величина $n_i(t)$ обозначает количественный прирост в единицу времени действующего фонда скважин $N_i(t)$ в момент $t$;
- постоянная $n$ обозначает количество скважин, вводимых в строй в единицу времени на всех месторождениях;
- фазовая переменная $V_i(t)$ обозначает запас газа, сохранившийся в залежи в текущий момент после частичного его извлечения из $i$-го месторождения;
- постоянная $\mathrm{c_i}$ означает стоимость обустройства скважины на $i$-ой залежи;
- постоянная величина с означает рыночную стоимость единицы объема газа;
- постоянная величина ρ означает показатель дисконтирования;
- постоянная величина $h_i$ означает среднюю глубину залегания $i$-го пласта;
- постоянная величина β означает удельные капиталовложения в расчете на единицу длины скважины;
- переменная величина $v_i(t)$ означает механическая скорость бурения скважин для $i$-ой залежи в момент $t$;
- постоянная величина $v$ означает максимальные совокупные механические возможности по скорости бурения скважин всеми имеющимися буровыми установками;
- постоянная величина $K$ обозначает капитальное вложение в обустройство новых скважин в единицу времени.
- постоянные величины $q_\mathrm{i}^0$, $N_i^0$ и $V_i^0$ являются начальными значениями соответствующих фазовых переменных

Во введенных обозначениях для группы газовых месторождений используется индекс $i$, который принимает значения 1 и 2.

Мы предполагаем одинаковые глубины залегания залежей, т.е. $h_1 = h_2 = h$.

Стоимость строительства одной скважины является результатом произведения глубины залежи на удельное капиталовложение

$$\mathrm{c}_1 = \mathrm{c}_2 = \beta h; \tag{1}$$

прирост фонда скважин определяется по формуле:

$$n_i(t) = \frac{v_i(t)}{h}, \;\; i = 1, 2. \tag{2}$$

Опишем модель разработки группы газовых месторождений с взаимовлияющими скважинами [2, 3]. Между переменными устанавливаются зависимости, представленные в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{N}_i \; = \; n_i(t), \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

$$\dot{q}_i = -\frac{q_i^0}{V_i^0} N_i(t) q_i(t) = -\alpha_i N_i(t) q_i(t), \quad i = 1, 2, \tag{4}$$

$$\dot{V}_i = -Q_i(t) = -N_i(t) q_i(t), \quad i = 1, 2 \tag{5}$$

при ограничениях

$$0 \le v_1(t) + v_2(t) \le v \tag{6}$$

$$0 \le v_i(t) \le v, \;\; i = 1, 2 \tag{7}$$

с начальными условиями

$$V_i^0 > 0, \;\; i = 1, 2, \tag{8}$$

$$q_i^0 > 0, \;\; i = 1, 2, \tag{9}$$

$$N_i^0 = 0, \;\; i = 1, 2. \tag{10}$$

Заметим, что в описании дифференциального уравнения (4) мы ввели еще одно дополнительное обозначение, облегчающее написание формулы:

$$\alpha_i = \frac{q_i^0}{V_i^0}, \;\; i = 1, 2. \tag{11}$$

Неравенства (6) являются связующим ограничением для модели (3)–(10). Заметим, что равенство нулю начальных значений действующего фонда добывающих скважин для всех газовых месторождений является вполне естественным предположением. В тоже время средние дебиты добывающих скважин для разных месторождений могут отличаться друг от друга.

Буровые компании осуществляют капитальные вложения в разработку месторождения. Мощность буровых установок является существенным ограничением темпов разработки. С учетом (1) и (2) получаем следующую формулу:

$$K = c_1 n_1(t) + c_2 n_2(t) = \beta[v_1(t) + v_2(t)] = \beta v.$$

Если в действительности капиталовложения меньше $\beta v$, то мы уменьшаем на соответствующую величину максимальную мощность буровых установок $v$. Поэтому считаем справедливым выполнение последнего соотношения. Отсюда получаем

$$v_1(t) + v_2(t) = v.$$

Из (3) и (4) с учетом (2), (9) и (10) приходим к следующим формулам:

$$N_i(t) = \int_0^t n_i(\xi)\, d\xi = \int_0^t \frac{v_i(\xi)}{h} d\xi, \;\; i = 1, 2; \tag{12}$$

$$q_i(t) = q_i^0 \exp\left[-\alpha_i \int_0^t (t-\xi) n_i(\xi)\, d\xi\right] = q_i^0 \exp\left[-\alpha_i \int_0^t (t-\xi) \frac{v_i(\xi)}{h} d\xi\right], \;\; i = 1, 2. \tag{13}$$

Из (12) и (13) вытекает $N_i(t) \geq 0$ и$q_i(t) > 0, \;\; i = 1, 2$.

Очевидно, что максимальная накопленная добыча газа за фиксированный период [0,τ] бурения $i$-го месторождения достигается при $v_i(t) = v, \;\; i = 1, 2$. Для остальных месторождений $v_{k \neq i}(t) = 0, \;\; i = 1, 2$. В этом случае (12) и (13) с учетом (9) и (10) представятся в следующем виде:

$$N_i(t) = \frac{v}{h} t = nt, \;\; i = 1, 2; \tag{14}$$

$$q_i(t) = q_i^0 \exp\left[-\alpha_i \frac{v}{2h} t^2\right] = q_i^0 \exp\left[-\alpha_i \frac{n}{2} t^2\right], \;\; i = 1, 2. \tag{15}$$

Текущая и накопленная добыча газа описываются формулами:

$$Q_i(t) = q_i^0 \frac{v}{h} t \exp\left[-\alpha_i \frac{v}{2h} t^2\right] = q_i^0 nt \exp\left[-\alpha_i \frac{n}{2} t^2\right], \;\; i = 1, 2\,; \tag{16}$$

$$\int_0^\tau Q_i(\theta)\, dt = \int_0^\tau q_i(\theta) N_i(\theta)\, d\theta = \frac{q_i^0 - q_i(\tau)}{\alpha_i^0} = \frac{q_i^0}{\alpha_i}[1 - \exp(-\alpha_i \frac{n}{2} \tau^2)], \;\; i = 1, 2. \tag{17}$$

Дисконтированный накопленный доход для группы газовых месторождений на конечном интервале $[0, T]$ определяется по формуле:

$$D = c \int_0^T [Q_1(t) + Q_2(t)] \mathrm{e}^{-\rho t}\, dt = \int_0^T [Q_1(t) + Q_2(t)] \mathrm{e}^{-\rho t}\, dt. \tag{18}$$

Здесь и далее мы полагаем $c = 1$, что уменьшает на единицу количество введенных переменных. Постоянная продажная цена единицы объема газа не влияет на решение оптимизационной задачи. Влияние оказывается только на значение функционала (18), числовое значение которого можно получить умножением правой части равенства (18) на реальную стоимость единицы объема газа.

Далее до конца статьи мы будем рассматривать группу, состоящую только из двух месторождений. Без потери общности предполагаем

$$q_1^0 \geq q_2^0. \tag{19}$$

**Задача 1.***Требуется максимизировать функционал* (18) *при дифференциальных связях* (3)-(5), *ограничениях*

$$0 \leq n_1(t) + n_2(t) = n,$$

$$0 \leq n_i(t) \leq n, \quad i = 1, 2$$

*с начальными условиями* (8)–(10). *Управлениями являются две переменные* $n_1(\mathrm{t})$ *и* $n_2(\mathrm{t})$, *которые принадлежат множеству измеримых функций.*

Рассматриваемая задача является задачей оптимального управления со свободным правым концом и фиксированным временем. Решение задачи 1 существует [9].

Приступим к поиску решения. Для этого воспользуемся принципом максимума Понтрягина.

Введем в рассмотрение четыре сопряженные переменные$\psi_1(t)e^{-\rho t}, \psi_2,(t)e^{-\rho t}$, $\varphi_1(t)e^{-\rho t}$ и $\varphi_2(t)e^{-\rho t}$. В дальнейшем вспомогательные функции $\psi_1(t), \psi_2(t), \varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ мы будем называть сопряженными переменными, как это было принято в статье [10].

Выпишем гамильтониан и четыре сопряженных уравнения:

$$H = [q_1N_1 + q_2N_2 - \psi_1\alpha_1q_1N_1 - \psi_2\alpha_2q_2N_2 + \varphi_1n_1 + \varphi_2n_2]e^{-\rho t}; \qquad (20)$$

$$\dot{\psi}_1 = \rho\psi_1 + N_1(\alpha_1\psi_1 - 1); \qquad (21)$$

$$\dot{\psi}_2 = \rho\psi_2 + N_2(\alpha_2\psi_2 - 1); \qquad (22)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \rho\varphi_1 + q_1(\alpha_1\psi_1 - 1); \qquad (23)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \rho\varphi_2 + q_2(\alpha_2\psi_2 - 1). \qquad (24)$$

Условия трансверсальности для задачи оптимального управления с фиксированным горизонтом и со свободным правым концом представятся в виде:

$$\psi_1(T) = \psi_2(T) = \varphi_1(T) = \varphi_2(T) = 0. \qquad (25)$$

Максимум гамильтониана (20) достигается при условии

$$n_1 + n_2 = n. \qquad (26)$$

### 1.2. Анализ сопряженных переменных

В данном пункте параграфа исследованы основные свойства сопряженных переменных. Выявлены диапазоны, в которых они расположены.

Умножаем обе части сопряженных уравнений (21) и (22) на $q_1$ и $q_2$, соответственно, и после несложных преобразований с учетом (4) получаем

$$\frac{d}{dt}[q_i\psi_i] = \rho q_i\psi_i - N_iq_i, \ i = 1, 2. \qquad (27)$$

Продолжаем преобразование. Умножаем обе части дифференциальных уравнений (27) на $e^{-\rho t}$ и после несложных преобразований проинтегрируем обе части полученных равенств от значения $t$ до величины $T$. Учитывая условия трансверсальности (25), приходим к соотношению

$$\psi_i(t)q_i(t)e^{-\rho t} = \int_t^T q_i(\xi)N_i(\xi)e^{-\rho\xi}d\xi, \ i = 1, 2. \qquad (28)$$

В силу положительности $q_i(t)$ и $N_i(t)$ вытекает, что интегралы в правой части равенств (28) положительны. Отсюда вытекает положительность сопряженных переменных $\psi_i(t)$при $t \in [0, T)$ и $\psi_i(T) = 0$.

Принимая во внимание (4), преобразуем (27). В результате получаем следующие дифференциальные уравнения

$$\frac{d}{dt}\left[q_i(\psi_i - \frac{1}{\alpha_i})\right] = \rho\psi_iq_i, \ i = 1, 2.$$

С учетом условий трансверсальности (25) проинтегрируем обе части последнего соотношения от значения $t$ до величины $T$

$$q_i(t)[\frac{1}{\alpha_i} - \psi_i(t)] = \frac{1}{\alpha_i}q_i(\mathrm{T}) + \rho\int_t^T q_i(\xi)\psi_i(\xi)\, d\xi, \ i = 1, 2.$$

Правая часть последнего равенства положительна. Значит, $\psi_i(t) < \frac{1}{\alpha_i}$. С учетом выше доказанной положительности $\psi_i(t)$ вытекает $0 < \psi_i(t) < \frac{1}{\alpha_i}$ на полуинтервале $[0, T)$. Найдены пределы, в которых заключены сопряженные переменные $\psi_i(t)$.

С сопряженными уравнениями (23) и (24) проделаем те же операции, что и с уравнениями (21) и (22). После всех преобразований решение сопряженных уравнений (23) и (24) представится в виде интегральных выражений

$$\varphi_i(t) = e^{\rho t}\int_t^T[1 - \alpha_i\psi_i(\xi)]q_i(\xi)\, e^{-\rho\xi}d\xi, \ i = 1, 2. \qquad (29)$$

Отсюда следует, что сопряженные переменные $\varphi_i(t)$ положительны на полуинтервале $[0, T)$. Умножаем обе части сопряженных уравнений (21) и (22) на $q_1$ и $q_2$, соответственно, и после несложных преобразований с учетом (4) получаем

$$\frac{d}{dt}[q_i(\alpha_i\psi_i-1)]=\rho\alpha_i q_i\psi_i, \qquad i=1,2.$$

Продифференцируем по $t$ обе части сопряженных уравнений (23) и (24). Подставим полученные выражения в последнее равенство. Приходим к следующему дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\ddot{\varphi}_i(t)-\rho\dot{\varphi}_i=\rho\alpha_i\psi_i q_i, \qquad i=1,2.$$

Умножаем обе части дифференциального уравнения на $\mathrm{e}^{-\rho t}$ и после преобразований с учетом (4) и (23)–(25) проинтегрируем полученный результат от $t$ до $T$:

$$\dot{\varphi}_i(t)=\dot{\varphi}_i(T)\mathrm{e}^{-\rho(T-t)}-\rho\alpha_i\int_t^T\psi_i(\xi)q_i(\xi)\,\mathrm{e}^{-\rho(\xi-t)}d\xi=$$

$$-q_i(T)\mathrm{e}^{-\rho(T-t)}-\rho\alpha_i\int_t^T\psi_i(\xi)q_i(\xi)\,\mathrm{e}^{-\rho(\xi-t)}d\xi, \qquad i=1,2.$$

Отсюда следует, что сопряженные переменные $\varphi_i(t)$ убывают.

### 1.3. Анализ особого режима функционирования разработок месторождений

Данный пункт данного параграфа посвящен анализу особого режима функционирования оптимальной траектории.

При максимизации гамильтониана (20) возможны три варианта соотношений между сопряженными переменными $\varphi_1$ и $\varphi_2$:

- пусть $\varphi_1=\varphi_2$ тогда $n_1+n_2=n$ и $n_1$ может принимать любые значения в промежутке от 0 до $n$;
- пусть $\varphi_1>\varphi_2$, тогда $n_1=n$;
- пусть $\varphi_1<\varphi_2$, тогда $n_2=n$.

Рассмотрим подробно первый вариант. Пусть

$$\varphi_1=\varphi_2 \tag{30}$$

в течении некоторого ненулевого промежутка времени. В этом случае из (23) и (24) вытекает следующее равенство:

$$(\alpha_1\psi_1-1)q_1=(\alpha_2\psi_2-1)q_2. \tag{31}$$

С учетом (4) преобразуем (21) и (22). В результате получаем:

$$\frac{d}{dt}[(\alpha_1\psi_1-1)q_1]=\rho\alpha_1\psi_1 q_1; \tag{32}$$

$$\frac{d}{dt}[(\alpha_2\psi_2-1)q_2]=\rho\alpha_2\psi_2 q_2. \tag{33}$$

Продифференцировав обе части равенства (31) по $t$ и сравнив результаты дифференцирования с (32) и (33), получаем

$$\alpha_1\psi_1 q_1=\alpha_2\psi_2 q_2. \tag{34}$$

Из (31) и (34) приходим к равенствам:

$$q_1=q_2; \tag{35}$$

$$\alpha_1\psi_1=\alpha_2\psi_2. \tag{36}$$

С учетом результатов дифференцирования обеих частей равенства (35) по $t$, дифференциальных уравнений (4) и равенства (35) получаем

$$\alpha_1 N_1=\alpha_2 N_2. \tag{37}$$

Продифференцировав (37), с учетом дифференциальных уравнений (3) получаем

$$\alpha_1 n_1=\alpha_2 n_2, \text{ где} \tag{38}$$

$$n_1=\frac{\alpha_2}{\alpha_2+\alpha_1}n; \;\; n_2=\frac{\alpha_1}{\alpha_2+\alpha_1}n. \tag{39}$$

Мощности буровых установок на каждом месторождении в этом случае постоянны и определяются следующими формулами:

$$v_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_2+\alpha_1} v;\ \ v_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2+\alpha_1} v. \tag{40}$$

Определим формулы значений дебита скважины для первого варианта на всем периоде планирования $[0, T]$. В этом случае величины дебита скважины изменяются по законам:

$$q_1(t) = q_1^0 \exp\left[-\frac{\alpha_1\alpha_2}{2(\alpha_2+\alpha_1)} nt^2\right]; \tag{41}$$

$$q_2(t) = q_2^0 \exp\left[-\frac{\alpha_1\alpha_2}{2(\alpha_2+\alpha_1)} nt^2\right]. \tag{42}$$

Равенство (37) также выполняется в начальный момент, т.е. $\alpha_1 N_1(0) = \alpha_2 N_2(0) = 0$.
Рассмотренную выше траекторию, у которой начальные значения дебита скважины равны

$$q_1^0 = q_2^0, \tag{43}$$

и имеет нулевые начальные фонды скважин $N_1^0 = N_2^0 = 0$, мы будем называть особой оптимальной траекторией. Она удовлетворяет на отрезке $[0, T]$ равенствам (30), (35)–(43) и условиями трансверсальности (25). Особая оптимальная траектория является аналогом магистрали в теории оптимального экономического роста. Другую оптимальную траекторию, не относящуюся к особой оптимальной траектории, мы будем называть обычной оптимальной траекторией.

### 1.4. Вывод формул для вычисления сопряженных переменных

С учетом условий трансверсальности (25) проинтегрируем дифференциальные уравнения (27) от $t$до $T$. Приходим к следующим интегральным соотношениям

$$\psi_i(t) q_i(t) e^{-\rho t} = \int_t^T Q_i(\xi) e^{-\rho\xi}\, d\xi = \int_t^T q_i(\xi) N_i(\xi) e^{-\rho\xi}\, d\xi = n_i \int_t^T q_i(\xi)\xi e^{-\rho\xi}\, d\xi,\ i=1, 2.$$

Обратим внимание на то, что сумма $\sum_{i=1}^{2} \psi_i(0) q_i(0)$ равна максимальному значению функционала (18).

Установим вклад каждого месторождения в максимальный накопленный доход.

Пусть $D$ — максимальное значение функционала. С учетом (35) и (39) приходим к следующим формулам:

$$\int_0^T q_1(t) N_1(t) e^{-\rho t}\, dt = \frac{\alpha_2}{\alpha_2+\alpha_1} D;\ \ \int_0^T q_2(t) N_2(t) e^{-\rho t}\, dt = \frac{\alpha_1}{\alpha_2+\alpha_1} D.$$

С учетом (27) и условий трансверсальности (25) проинтегрируем дифференциальные уравнения (23) и (24) от $\tau$ до $T$. В результате получаем

$$\varphi_1(\tau) = \int_\tau^T q_1(t) e^{-\rho(t-\tau)} dt - \int_\tau^T \left[\int_t^T \alpha_1 q_1(\xi) N_1(\xi) e^{-\rho(\xi-\tau)}\, d\xi\right] dt =$$
$$(T-\tau) q_1(T) e^{-\rho(T-\tau)} + \rho \int_\tau^T (t-\tau) q_1(t)\, e^{-\rho(t-\tau)} dt. \tag{44}$$

$$\varphi_2(\tau) = \int_\tau^T q_2(t) e^{-\rho(t-\tau)} dt - \int_\tau^T \left[\int_t^T \alpha_2 q_2(\xi) N_2(\xi) e^{-\rho(\xi-\tau)}\, d\xi\right] dt =$$
$$(T-\tau) q_2(T) e^{-\rho(T-\tau)} + \rho \int_\tau^T (t-\tau) q_2(t)\, e^{-\rho(t-\tau)} dt. \tag{45}$$

### 1.5. Изолированность особой оптимальной траектории

В данном подразделе мы доказываем невозможность построения оптимального синтеза траекторий. Покажем, что не существует другой подозрительной на оптимальность траектории, которая входит или исходит из особой оптимальной траектории. В этом случае управления другой подозрительной на оптимальность траектории удовлетворяют следующим равенствам: $n_1(t) = n$ и $n_2(t) = 0$, или $n_2(t) = n$ и $n_1(t) = 0$. Пусть $t$—точка, лежащая на особой оптимальной траектории. В этой точке выполняются равенства (30), (35)–(37).

Находим разность сопряженных уравнений (23) и (24)

$$\dot\varphi_1 - \dot\varphi_2 = \rho(\varphi_1 - \varphi_2) + (\alpha_1\psi_1 q_1 - q_1) - (\alpha_2\psi_2 q_2 - q_2). \tag{46}$$

Продифференцируем уравнение (46) по $t$. Воспользовавшись (32) и (33), приходим к следующему соотношению:

$$\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2 = \rho(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + \rho\alpha_1\psi_1 q_1 - \rho\alpha_2\psi_2 q_2. \quad (47)$$

Продифференцируем уравнение (47) по $t$. С учетом (4), (32) и (33) получаем:

$$\dddot{\varphi}_1 - \dddot{\varphi}_2 = \rho(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) + \rho\alpha_1(\rho\psi_1 q_1 - q_1 N_1) - \rho\alpha_2(\rho\psi_2 q_2 - q_2 N_2). \quad (48)$$

Найдем четвертую производную от разности функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$. Для этого продифференцируем уравнение(48) по $t$. С учетом (3), (4), (32) и (33) приходим к равенству:

$$\varphi_1^{(4)} - \varphi_2^{(4)} = \rho(\dddot{\varphi}_1 - \dddot{\varphi}_2) + \rho\alpha_1[(\rho^2\psi_1 q_1 - \rho q_1 N_1) + \rho\alpha_1 q_1 N_1^2 - q_1 n_1] - \rho\alpha_2[(\rho^2\psi_2 q_2 - \rho q_2 N_2) + \rho\alpha_2 q_2 N_2^2 - q_2 n_2]. \quad (49)$$

Разложим разность $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ в сколь угодно малой окрестности точки $t$ ($\Delta t \neq 0$) в ряд Тейлора:

$$\varphi_1(t+\Delta t) - \varphi_2(t+\Delta t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t) + \sum_{k=1}^{4} \frac{\varphi_1^{(k)}(t) - \varphi_2^{(k)}(t)}{k!}\Delta t^k + \mathrm{o}(\Delta t^4). \quad (50)$$

В точке $t$ правые части уравнений (46) - (48) обращаются в нуль. При условии (39) правая часть уравнения (49) обращается в нуль. Из этого следует, что точка $t + \Delta t$ лежит на особой оптимальной траектории.

Пусть $n_1(t) = n$ и $n_2(t) = 0$, тогда из (49) вытекает, что $\varphi_1^{(4)} < \varphi_2^{(4)}$. Отсюда и из (50) следует строгое неравенство $\varphi_1(t+\Delta t) < \varphi_2(t+\Delta t)$ для всех $\Delta t \neq 0$, что противоречит условиям максимума гамильтониана. Аналогичный вывод получаем при условии $n_2(t) = n$ и $n_1(t) = 0$. Значит, через любую точку особой оптимальной траектории проходит только одна единственная оптимальная траектория.

### 1.6. Обычный режим

В этом разделе мы исследуем обычный режим, который относится к рассмотренным выше вариантам 2 и 3. Начальные значения дебита скважины удовлетворяют следующему неравенству: $q_1^0 \neq q_2^0$. Начальные фонды скважин равны нулю. В этом случае сопряженные переменные удовлетворяют неравенству

$$\varphi_1(t) \neq \varphi_2(t), \quad (51)$$

за исключением, возможно, некоторого количества точек, где они пересекаются. Определяем разницу двух функций (44) и (45)

$$\varphi_2(t) - \varphi_1(t) = [q_2(T) - q_1(T)](T-t)\mathrm{e}^{-\rho(T-t)} + \rho\int_t^T [q_2(\xi) - q_1(\xi)](\xi - t)\,\mathrm{e}^{-\rho(\xi-t)}\mathrm{d}\xi. \quad (52)$$

Пусть $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$точки всех пересечений траекторий $\varphi_2(t)$ и $\varphi_1(t)$. Точки строго упорядочены по величине их убыванию $T = \tau_0 > \tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_n$. С учетом равенств $\varphi_2(\tau_i) = \varphi_1(\tau_i)$ для $i = 1, 2, \dots, n$ преобразуем (52):

$$\int_{\tau_{i1}}^{T=\tau_0} [q_2(\xi) - q_1(\xi)]\frac{\xi - \tau_{i1}}{T - \tau_{i1}}\mathrm{e}^{-\rho\xi}\mathrm{d}\xi = \int_{\tau_{i2}}^{T=\tau_0} [q_2(\xi) - q_1(\xi)]\frac{\xi - \tau_{i2}}{T - \tau_{i2}}\mathrm{e}^{-\rho\xi}\mathrm{d}\xi. \quad (53)$$

Здесь $i_1 \neq i_2$.

## 2. Заключение

В статье построена непрерывная динамическая аппроксимационная модель для разработки группы газовых месторождений с взаимовлияющими скважинами, состоящей из двух месторождений. Период планирования является фиксированным.

Мы делаем упрощающие допущения. Мы вводим обозначения, используемые в модели. В ней мы учитываем глубину залежей, общий объем инвестиций и т.д. Управляющими параметрами являются темпы ввода новых скважин на каждом месторождении. Ограничивающим фактором в модели являются капиталовложения, выделяемые на строительство новых скважин, и совокупные мощности буровых установок. Также они являются связующим ограничением двух месторождений. Критерием деятельности группы месторождений является общий накопленный дисконтированный доход от продажи газа.

Мы формулируем задачу с двумя месторождениями. Рассматриваемая задача является задачей оптимального управления. Мы описываем элементы управления как измеримые функции. Решение задачи оптимального управления существует. Для решения этой задачи мы используем принцип максимума Понтрягина. Мы выписываем гамильтониан, сопряженные переменные и условия трансверсальности. Сопряженные переменные анализируются. Мы определяем область их локаций я и характеристики их поведения.

Мы максимизируем гамильтониан. При максимизации выделяются две области. В первой области мы наблюдаем совпадение сопряженных переменных на всем периоде планирования. Эта область содержит особую траекторию, которая является единственной и оптимальной. Оптимальное управление состоит в одновременном бурении скважин на двух месторождениях. Темпы бурения постоянны и могут отличаться друг от друга. Особая оптимальная траектория является аналогом магистрали в теории оптимального экономического роста.

В другой области отсутствует полное совпадение сопряженных переменных на некотором временном интервале. В этой области в любой момент времени все буровые мощности задействованы только на одном месторождении.

При разработке месторождений мы можем полностью переключать бурение с одного месторождения на другое. В течение всего периода планирования может произойти более одного такого переключения.

Для любых оптимальных траекторий мы устанавливаем связь между начальными значениями сопряженных переменных и максимальными значениями функционала. Для особой оптимальной траектории мы определяем вклад каждого месторождения в максимальный накопленный доход.

Мы выписываем формулы для сопряженных переменных, которые задаются интегральными зависимостями. Доказываем, что оптимальная траектория из второй области не входит в особую оптимальную траекторию и не исходит из нее. Особая оптимальная траектория полностью изолирована.

## Литература


1. *Вяхирев Р.И., Коротаев Ю.П., Кабанов Н.И.* Теория и опыт добычи газа. – М.: Недра, 1998. – 480 с.
2. *Хачатуров В.Р., Соломатин А.Н., Злотов А.В. и др.* Планирование и проектирование освоения нефтегазодобывающих регионов и месторождений: Математические модели, методы, применение / Под ред. *В.Р. Хачатурова*. – М.: УРСС:ЛЕНАНД, 2015. – 304 с.
3. *Маргулов Р.Д., Хачатуров В.Р., Федосеев А.В.*Системный анализ в перспективном планировании добычи газа.– М.: Недра, 1992. – 288 с.
4. *Skiba A.K.* Dynamic model analysis of gas deposit developments// Large-Scale System Development (MLSD’2019):Proceedings of the 12th International Conference. IEEE Conference Publications. – IEEE Xplore Digital Library, 2019. – P. 619–622.
5. *Skiba A.K.* Influence of the Sequence of Drilling Fields on the Maximum Total Gas Production// Large-Scale System Development (MLSD’2023): Proceedings of the 16th International Conference. IEEE Conference Publications. – IEEE Xplore Digital Library, 2023.
6. *Skiba A.K.* Maximization of the Accumulated Extraction in a Gas Fields Model // Int. Conf. on Optimization and Applications (OPTIMA’2018): Communications in Computer and Information Science, Springer.– 2019. – Vol. 974. – P. 453–469.
7. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.*Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969.– 384 с.
8. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1975. – 528 с.
9. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972. – 576 с.
10. *Эрроу К.* Применение теории управления к экономическому росту// Матем. экономика. – М.: Мир, 1974. – С. 7–45.