# ПОСТРОЕНИЕ ГАРАНТИРУЮЩИХ УПРАВЛЕНИЙ В ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ ЭКСПОРТНОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

**Сытов А.Н.**
*Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия*
an-sytov@yandex.ru

*Аннотация. В работе рассматривается простейшая модель экспортного предприятия, функционирующего в условиях неопределённости. Множество возможных значений неопределённых факторов задаётся с помощью дерева сценариев. Приводятся постановки оптимизационных задач для нахождения гарантирующих управлений. Их решение демонстрируется на численном примере.*

*Ключевые слова: экспортное предприятие, гарантированный результат, сценарное планирование, транспортная задача, линейное программирование, вычислительный эксперимент.*

## Введение

В работе [1] была предложена модель экономического объекта, который мы назвали экспортным предприятием. По сути, такое предприятие рассматривалось как посредник между поставщиками и заказчиками: покупая продукты у поставщиков, предприятие создаёт запасы уже собственных продуктов, которые в дальнейшем оно продаёт заказчикам. В процессе своего функционирования предприятие имеет возможность вкладывать денежные средства на депозиты и брать кредиты в банке.

Мы рассматривали предприятие как некоторый управляемый объект с позиции внешнего наблюдателя, который функционирует в дискретном времени и в условиях неопределённости. Фазовые уравнения представляли собой балансовые соотношения по количеству продуктов и наличных денежных средств предприятия, а также изменения состояния его депозитных и кредитных счетов. Эти уравнения дополняются заданными начальными условиями, ограничениями на управление и фазовые переменные. В качестве критерия эффективности был выбран основной капитал предприятия, равный разности между суммой активов и суммой обязательств в некоторый момент времени, соответствующий окончанию планового периода.

Помимо самого предприятия, поставщиков, заказчиков и банков, другим участником системы может быть некоторый вышестоящий орган, назовём его Центром. Например, его роль может сводиться к установлению ограничений на суммарный размер кредитов предприятия, то есть заданию в каждый момент времени наибольшего размера его обязательств. В настоящей работе считается, что такие ограничения отсутствуют, а Центр регламентирует взаимодействие предприятия с заказчиками: предоставляя или лишая его возможности выбора части спроса заказчиков, которая должна быть удовлетворена. Кроме того, мы считаем, что Центр может субсидировать деятельность предприятия. Как будет показано на построенном численном примере, в случае если Центр требует от предприятия удовлетворять по возможности весь спрос заказчиков, подобная безвозмездная передача денежных средств играет решающую роль для выполнения условия сбалансированности финансового состояния предприятия в конечный момент времени.

Настоящая работа выполнена в стиле [2] и направлена на проведение численных расчётов по построению гарантирующий управлений в очень упрощённой модели экспортного предприятия при сценарной неопределённости. В данном случае мы несколько поменяли постановки оптимизационных задач и не рассматриваем гарантированные по риску решения. В частности, здесь мы “перенесли” динамику системы явно на граф – дерево сценариев, осуществляя выбор управляющих переменных в узлах этого дерева на основе принципа гарантированного результата [3]. Предлагается использовать два способа такого выбора, что приводит к постановкам двух оптимизационных задач максиминного типа. Решение первой задачи мы называем регулируемым робастным, а второй – робастным [4]. Технически указанные задачи решаются как линейные программы, а поскольку субсидирование понимается как варьирование начального условия фазового уравнения, это приводит к их параметризации.

Даже в простейшей постановке на управляющие переменные, ответственные за распределение продуктов между поставщиками и заказчиками, накладывается условие целочисленности. С вычислительной точки зрения это существенно усложняет рассматриваемые оптимизационные задачи. Поэтому в работе используется следующий эвристический приём декомпозиционного характера: все решения о распределении продуктов предприятие выбирает в вершинах сценарного дерева, то есть при известных значениях неопределённых факторов в этой вершине. В таком случае реализованные потоки денежных средств определяются в результате решения “простых” задач линейного программирования транспортного типа [5, 6], а выбор размеров вложений и заимствований предприятие осуществляет в результате решения указанных выше максиминных задач уже при заданных значениях этих потоков в вершинах дерева.

## 1. Модель экспортного предприятия

В первоначальной модели описание взаимодействия между участниками системы и предприятием в произвольный момент времени было формализовано на основе набора контрактов. В рассматриваемом упрощённом варианте считается, что в каждый момент времени поставщики и заказчики могут заключать с предприятием только один контракт. Это допущение не ограничивает изложение и позволяет индексировать модельные величины, относящиеся к поставщикам и заказчикам, просто тем или иным участником системы. Обозначим через $K_i^+(t)$, $K_i^-(t)$ – множества поставщиков и заказчиков, доступных предприятию в момент $t$ соответственно для покупки и продажи продуктов $i$-го вида.

Будем считать, что предприятие не создаёт запасы продуктов: в каждый момент времени все поступающие от поставщиков продукты сразу же реализуются среди заказчиков. Пусть $y_{i,k,k'}(t)$ – количество продуктов вида $i$, которое поступает в момент $t$ от поставщика $k \in K_i^+(t)$ и реализуется заказчику $k' \in K_i^-(t)$. Тогда для каждого продукта $i \in I$ с поставщиком $k$ можно связать входящий материальный поток $x_{i,k}^+(t)$, а с заказчиком $k'$ – исходящий материальный поток $x_{i,k'}^-(t)$. Запишем для них следующие формальные выражения:

$$x_{i,k}^+(t) = \sum_{k' \in K_i^-(t)} y_{i,k,k'}(t),\ k \in K_i^+(t);\ \ x_{i,k'}^-(t) = \sum_{k \in K_i^+(t)} y_{i,k,k'}(t),\ k' \in K_i^-(t).$$

Цена покупки $i$-го продукта у поставщика $k \in K_i^+(t)$ в момент $t$ обозначается как $c_{i,k}^+(t)$. Для цены продажи этого продукта заказчику $k' \in K_i^-(t)$ используется обозначение $c_{i,k'}^-(t)$. Финансовые инструменты, доступные предприятию в момент времени $t$ – это краткосрочные, на один шаг модели, депозит со ставкой $\zeta^d(t)$ и кредит со ставкой $\zeta^c(t)$. Соответствующие размеры вложений и заимствований обозначаются через $h^d(t)$ и $h^c(t)$ и до момента $t = 0$ считаются равными нулю.

Фазовое уравнение с начальным условием, которое содержит субсидию предприятию в размере $m$ (с экономической точки зрения естественно рассматривать только неотрицательные значения этой величины), можно записать в виде:

$$M(-1) = m,\ M(t) = M(t-1) + Q^d(t) + Q^c(t) + Q^{p,-}(t) - Q^{p,+}(t),\ \ t = 0, \dots, T.$$

В него входят потоки денежных средств, связанные с различными операциями предприятия в момент $t$ . Выпишем для них соответствующие выражения:

- операции с депозитами

$$Q^d(t) = \left(1 + \zeta^d(t-1)\right) h^d(t-1) - h^d(t);$$

- операции с кредитами

$$Q^c(t) = h^c(t) - (1 + \zeta^c(t-1))\, h^c(t-1);$$

- покупка продуктов

$$Q^{p,+}(t) = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i^+(t)} c_{i,k}^+(t)\, x_{i,k}^+(t);$$

- продажа продуктов

$$Q^{p,-}(t) = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i^-(t)} c_{i,k}^-(t)\, x_{i,k}^-(t).$$

Объединим два последних потока в один и представим образовавшийся – в виде суммы потоков, соответствующих продуктам одного вида:

$$Q^p(t) = Q^{p,-}(t) - Q^{p,+}(t) = \sum_{i \in I} Q_i^p(t).$$

Здесь $Q_i^p(t)$ – прибыль предприятия в момент $t$ по операциям купли-продажи продуктов $i$-го вида. Она определяется как разность между выручкой от продаж продуктов данного вида и затратами на их приобретение. Учитывая приведённые выше выражения для материальных потоков, получим:

$$Q_i^p(t) = \sum_{k\in K_i^+(t)} \sum_{k'\in K_i^-(t)} \left(c_{i,k'}^-(t) - c_{i,k}^+(t)\right)\, y_{i,k,k'}(t).$$

Ограничения на фазовые и управляющие переменные в момент $t$ включают в себя:

- условия неотрицательности:

$$M(t) \ge 0,\; h^d(t) \ge 0,\; h^c(t) \ge 0;$$

- условия неотрицательности и целочисленности управляющих переменных, характеризующих распределение продуктов:

$$y_{i,k,k'}(t) \ge 0 \text{ и целые},\;\; i\in I, k\in K_i^+(t), k'\in K_i^-(t);$$

- ограничения на материальные ресурсы:

$$x_{i,k}^+(t) \le \chi_{i,k}^+(t),\; i\in I, k\in K_i^+(t);\;\; x_{i,k'}^-(t) \le (=)\, \chi_{i,k'}^-(t),\; i\in I, k'\in K_i^-(t);$$

Последняя запись означает, что, если рассматривается ситуация, когда в некоторый момент времени предприятие стремится по возможности удовлетворить весь спрос со стороны заказчиков, каждое неравенство этой группы заменяется на соответствующее ограничение-равенство.

Взаимодействие предприятия с Центром формально описывается “знаковой” переменной $\delta_i(t)$, которая может принимать только два значения: $-1, 0$. Первое значение соответствует ситуации, когда Центр в момент $t$ предоставляет предприятию полную свободу в выборе заказчиков для реализации продукта $i$-го вида (соответствующие ограничения по материальным ресурсам имеют вид неравенств), а второе – когда от предприятия требуется удовлетворить по возможности весь спрос заказчиков (ограничения задаются равенствами).

Поскольку в каждый момент $t$ товарные запасы равны нулю, активы $A(t)$, обязательства $L(t)$ и собственный капитал $E(t)$ предприятия будут иметь вид:

$$A(t) = M(t) + h^d(t),\; L(t) = h^c(t),\; E(t) = A(t) - L(t).$$

Подытожим. Фазовой переменной считается $M(t)$ – наличные денежные средства (касса) предприятия. К управлению относятся: $y(t)$ – векторная переменная, задающая распределение продуктов между поставщиками и заказчиками; $h^d(t)$, $h^c(t)$ – объёмы вложений на депозиты и заимствований по кредитам. Неопределёнными факторами считаются: $K^+(t)$, $K^-(t)$ – совокупности поставщиков и заказчиков; $c^+(t)$, $c^-(t)$ – цены за одну единицу продукта, по которым предприятие закупает продукты у поставщиков и продаёт заказчикам; $\chi^+(t)$, $\chi^-(t)$ – наибольшие количества продуктов, предлагаемых поставщиками и запрашиваемых заказчиками; $\zeta^d(t)$, $\zeta^c(t)$ – ставки по депозитам и кредитам. Помимо перечисленных, к неопределённым факторам относится знаковая переменная $\delta(t)$, которая характеризует взаимодействие предприятия с Центром.

Составим векторы управляющих и неконтролируемых переменных:

$$\boldsymbol{u}(t) = \left(y(t), h^d(t), h^c(t)\right),$$

$$\boldsymbol{w}(t) = \left(K^+(t), K^-(t), c^+(t), c^-(t), \chi^+(t), \chi^-(t), \zeta^d(t), \zeta^c(t), \delta(t)\right).$$

Здесь все переменные, относящиеся к кредитам и депозитам, являются скалярными величинам. $K^a(t) = (K_i^a(t),\; i\in I)$, $a\in(+,-)$ можно представлять как массивы $|I|$ списков, состоящих из $N_i^a(t) = |K_i^a(t)|$ элементов.

Остальные компоненты – это векторы соответствующих размерностей. Их легко установить из контекста и выразить через количества рассматриваемых в модели видов продуктов, а также поставщиков и заказчиков. Так, $y(t)$ будет иметь размерность $\sum_{i\in I} N_i^+(t)\, N_i^-(t)$. Приведём координатные представления этих компонент:

$$y(t) = \left(y_{i,k,k'}(t),\; i\in I, k\in K_i^+(t), k'\in K_i^-(t)\right);$$

$$c^a(t) = \left(c_{i,k}^a(t),\; i\in I, k\in K_i^a(t)\right), \chi^a(t) = \left(\chi_{i,k}^a(t),\; i\in I, k\in K_i^a(t)\right),\; a\in(+,-);$$

$$\delta(t) = (\delta_i(t),\; i\in I).$$

В качестве критерия выбирается собственный капитал предприятия в конечный момент времени, то есть

$$f_0 = E(T).$$

При планировании естественно стремление к его максимизации.

## 2. Постановки оптимизационных задач

Множество возможных значений неопределённых факторов $\bar{W}$ считается конечным и задаётся сценарным деревом, которое удобно представлять в виде ориентированного графа. Корень $v_r$ располагается на нулевом уровне, ему соответствует начальный момент времени, и приписывается фиксированное значение $\boldsymbol{w}(v_r)$. Остальные вершины (термины "вершина" и "узел" далее будут использоваться взаимозаменяемо) этого дерева располагаются на уровнях, соответствующих моментам времени $0, \ldots, T$. Множество вершин на уровне $t$ обозначается через $V(t)$. Их объединение $\bar{V} = V(0) \cup V(1) \cup \ldots \cup V(T)$ есть множество всех вершин сценарного дерева. Каждая вершина $v$ на уровне $t$ (будем писать $v \in V(t)$) характеризуется единственным "маршрутом" от корня до этой вершины. Ему приписывается набор значений неопределенных факторов $\bar{\boldsymbol{w}}(v)$, которые могут реализоваться в вершинах этого пути. Естественно, что $\bar{W} = \left(\bar{\boldsymbol{w}}(v),\ v \in V(T)\right)$.

Будем считать, что все решения о распределении продуктов предприятие выбирает в узлах сценарного дерева при известных значениях неопределённых факторов в этом узле. Для нахождения распределения продуктов $i$-го вида в вершине $v \in \bar{V}$ решается следующая оптимизационная задача транспортного типа:

$$max \sum_{k \in K_i^+(v)} \sum_{k' \in K_i^-(v)} \left(c_{i,k'}^-(v) - c_{i,k}^+(v)\right)\ y_{k,k'} \tag{1}$$

$$\sum_{k' \in K_i^-(v)} y_{k,k'} \leq \chi_{i,k}^+(v), \quad k \in K_i^+(v);$$

$$\sum_{k \in K_i^+(v)} y_{k,k'} \leq (=) \chi_{i,k'}^-(v), \quad k' \in K_i^-(v);$$

$$y_{k,k'} \geq 0 \text{ и целые}, \quad k \in K_i^+(v), k' \in K_i^-(v).$$

В этой постановке используется сокращённая запись для варьируемых переменных.

Оптимальное значение критерия $Q_i^{p*}(v)$ задаёт поток денежных средств предприятия в узле $v$ по операциям купли-продажи продукта $i$-го вида. Суммарный поток по этим операциям определим как

$$Q^p(v) = \sum_{i \in I} Q_i^{p*}(v).$$

При $\delta_i(v) = -1$, т. е. предприятие обладает полной свободой выбора – какую часть спроса заказчиков удовлетворять, все ограничения имеют вид неравенств. Как нетрудно заметить, поставщикам $k \in K_i^+(v)$ и заказчикам $k' \in K_i^-(v)$ с "перекрёстными" ценами $c_{i,k'}^-(v) - c_{i,k}^+(v) > 0$ в оптимальном решении будут соответствовать положительные компоненты. Оптимальное значение критерия при этом будет положительным числом. Если поставщиков и заказчиков с такими ценами нет, то $Q_i^{p*}(v) = 0$.

При $\delta_i(v) = 0$ возникает ситуация, когда Центр требует от предприятия удовлетворить по возможности весь спрос заказчиков. Осторожная формулировка здесь связана с тем, что предложения поставщиков может оказаться недостаточно для удовлетворения в полном объёме спроса заказчиков. Формально в этом случае следует изменить приведённую выше постановку. А именно, новая задача записывается как стандартная транспортная (с ограничениями равенствами в первых двух группах ограничений), но с нарушенным условием баланса. Это условие поправляется введением фиктивного поставщика или заказчика в зависимости от знака величины избытка суммарного предложения. Оптимальное значение потока денежных средств при этом может оказаться отрицательным, что соответствует убытку (отрицательной прибыли) предприятия по операциям с поставщиками и заказчиками.

Фазовое уравнение на сценарном дереве описывает изменение кассы предприятия при переходе от одной вершины к соседней, двигаясь слева направо от корня к листьям:

$$M(v_r) = m - h^d(v_r) + h^c(v_r) + Q^p(v_r), \tag{2}$$

$$M(v) = M(v^{\prec}) - h^d(v) + \left(1 + \zeta^d(v^{\prec})\right) h^d(v^{\prec}) + h^c(v) - \left(1 + \zeta^c(v^{\prec})\right) h^c(v^{\prec}) + Q^p(v),\ v \in \bar{V}/V(0).$$

Здесь $v^{\prec}$ обозначает родительскую вершину для $v$ (также её можно назвать предшественницей $v$, чем и объясняется выбор значка сверху у соответствующего символа). Напомним, что $V(0) = \{v_r\}$. Запишем собственный капитал предприятия в вершине $v \in \bar{V}$:

$$E(v) = M(v) + h^d(v) - h^c(v). \tag{3}$$

Заметим, что он фактически не зависит от управляющих переменных и кассы в данном узле. Поэтому все ограничения нашей модели теперь можно записать в виде:

$$M(v) \geq 0, h^d(v) \geq 0, h^c(v) \geq 0, \quad v \in \bar{V}/V(T). \tag{4}$$

Один из возможных подходов к принятию решений в рассматриваемой задаче основывается на принципе гарантированного результата: выбирается управление $\boldsymbol{u}^*_{adj}(v;m)$, $v \in \bar{V}/V(T)$, доставляющее решение следующей оптимизационной задаче:

$$\max_{\boldsymbol{u}(v), v\in \bar{V}/V(T)} \min_{v_l \in V(T)} f_0(\boldsymbol{u}(v), v \in \bar{V}/V(T)\,; \bar{\boldsymbol{w}}(v_l); m) \tag{5.1}$$

при ограничениях:

$$\boldsymbol{g}(t, \bar{\boldsymbol{u}}(v), \bar{\boldsymbol{w}}(v); m) \leqq 0, \quad t = 0, \dots, T-1, v \in V(t). \tag{5.2}$$

Здесь через $\bar{\boldsymbol{u}}(v)$ мы обозначили набор управляющих переменных в вершинах дерева на пути от корня к вершине $v$. Эти ограничения формируются на основе (2), (4) и при каждом $v$ представляют собой конечную систему линейных неравенств. Перепишем эту задачу в виде следующей линейной программы:

$$R^*_{adj}(m) = \max_{\boldsymbol{u}(v), v\in\bar{V}/V(T); e\in\mathbb{R}} e \tag{6}$$

при ограничениях: (5.2)$\bigcap\{e \leq f_0(\boldsymbol{u}(v), v \in \bar{V}/V(T)\,; \bar{\boldsymbol{w}}(v_l); m),\ v_l \in V(T)\}$.

Если она разрешима при каждом $m$ (для этого достаточно потребовать, чтобы в каждой вершине $v \in \bar{V}/V(T)$ выполнялось естественное условие $\zeta^d(v) < \zeta^c(v)$), то легко видеть, что оптимальное значение $e$ соответствует минимальному значению собственного капитала при оптимальном управлении среди вершин терминального уровня. Говоря неформально, решение задачи (5.1), (5.2) достигается на некоторых листьях сценарного дерева. Пусть $V^*_{adj}(T;m)$ – множество таких терминальных узлов. Теперь мы можем выделить наборы $\bar{\boldsymbol{u}}^*_{adj}(v^{\prec};m)$, $\bar{\boldsymbol{w}}^*_{adj}(v;m)$, $\bar{E}^*_{adj}(v;m)$, $v \in V^*_{adj}(T;m)$ и характеризовать ими решение данной задачи.

Предложим второй способ: будем выбирать управление $\boldsymbol{u}^*(0;m), \dots, \boldsymbol{u}^*(T-1;m)$, доставляющее решение оптимизационной задаче:

$$\max_{\boldsymbol{u}(0),\dots,\boldsymbol{u}(T-1)} \min_{v_l \in V(T)} f_0(\boldsymbol{u}(0), \dots, \boldsymbol{u}(T-1), \bar{\boldsymbol{w}}(v_l); m) \tag{7.1}$$

при ограничениях:

$$\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{u}(0), \dots, \boldsymbol{u}(t), \bar{\boldsymbol{w}}(v); m) \leqq 0, \quad t = 0, \dots, T-1, v \in V(t). \tag{7.2}$$

Как и в предыдущем случае эта задача сводится к следующей параметрической линейной программе:

$$R^*(m) = \max_{\boldsymbol{u}(0),\dots,\boldsymbol{u}(T-1); e\in\mathbb{R}} e \tag{8}$$

при ограничениях: (6.2)$\bigcap\{e \leq f_0(\boldsymbol{u}(0), \dots, \boldsymbol{u}(T-1), \bar{\boldsymbol{w}}(v_l); m),\ v_l \in V(T)\}$.

В этом случае мы сохранили прежнее обозначение для критерия и вектор-функции в левых частях ограничений. Как и для предыдущей задачи, они выводятся при помощи соотношений (2) – (4), с той лишь разницей, что теперь управляющие переменные считаются одинаковыми для всех узлов дерева на данном уровне. Это, впрочем, можно было бы сразу учесть в предыдущей постановке, добавив соответствующие ограничения-равенства. Тогда становится очевидным $R^*(m) \leq R^*_{adj}(m)$.

Сказанное выше про достижимость решения задачи на листьях дерева справедливо и здесь. Соответствующие наборы неопределённых факторов и порождаемые ими оптимальные траектории собственного капитала вводятся как $\bar{\boldsymbol{w}}^*(v;m)$, $\bar{E}^*(v;m)$, $v \in V^*(T;m)$.

Итак, рассматриваются два способа выбора управляющих переменных, назовём их программными стратегиями. При первом способе каждый вектор управляющих переменных $\boldsymbol{u}(t)$ “корректируется” в зависимости от вершины сценарного дерева, расположенной на уровне $t$. Полученное решение будем называть регулируемым робастным. Его можно интерпретировать следующим образом. В каждый момент времени управление выбирается в зависимости от узла сценарного дерева, расположенного на уровне, соответствующем данному моменту времени, т. е. при уже известной последовательности значений неопределённых факторов по пути, ведущему в данный узел. Таким образом, управление как бы регулируется в зависимости от информации о неопределённости, полученной к данному моменту времени. При втором способе подобной коррекции не осуществляется – управляющие переменные считаются одинаковыми для всех вершин данного уровня. Решение в таком случае будем называть робастным.

В обоих случаях субсидия предприятию определяется как минимальное неотрицательное значение параметра $m$, при котором оптимальный критерий будет неотрицательным:

$$m_{adj}^* = min\left(m: m \geq 0, R_{adj}^*(m) \geq 0\right), \quad m^* = min(m: m \geq 0, R^*(m) \geq 0). \tag{9}$$

В тех случаях, когда $R_{adj}^*(0) < 0$ ($R^*(0) < 0$), для этого просто некоторым итерационным методом находится корень соответствующего уравнения. Эта процедура обосновывается тем, что каждая из указанных параметрических зависимостей представляется непрерывной и монотонной функцией (как свойств зависимости решения задачи линейного программирования от вектора в правой части ограничений [7]).

Маршрут $\sigma$ от корня до некоторого листа $v \in V(T)$ будем называть сценарием. Этот путь проходит через вершины $v_\sigma(t)$, $t = 0, \dots, T$, расположенные на соответствующих уровнях. Конечное множество сценариев обозначается через $\Sigma$ (ясно, что $|\Sigma| = |V(T)|$), где каждому $\sigma \in \Sigma$ соответствует неопределённость $\bar{\boldsymbol{w}}_\sigma(T) = \left(\boldsymbol{w}_\sigma(0), \dots, \boldsymbol{w}_\sigma(T)\right)$ и управление $\bar{\boldsymbol{u}}_\sigma(T-1) = \left(\boldsymbol{u}_\sigma(0), \dots, \boldsymbol{u}_\sigma(T-1)\right)$. Здесь мы приняли соглашение $\boldsymbol{w}_\sigma\left(v_\sigma(t)\right) = \boldsymbol{w}_\sigma(t)$, $\boldsymbol{u}_\sigma\left(v_\sigma(t)\right) = \boldsymbol{u}_\sigma(t)$. Рассмотрим следующую задачу:

$$R_{min}^*(m) = \min_{\sigma \in \Sigma} \max_{\bar{\boldsymbol{u}}_\sigma(T-1)} \{f_0(\bar{\boldsymbol{u}}_\sigma(T-1), \bar{\boldsymbol{w}}_\sigma(T); m): \boldsymbol{g}(t, \bar{\boldsymbol{u}}_\sigma(t), \bar{\boldsymbol{w}}_\sigma(t); m) \leqq 0,\ t = 0, \dots, T-1\}. \tag{10}$$

Здесь внутренний максимум – это параметрическая линейная программа, критерий и ограничения которой формируются на основе (2) – (4), выделяя из дерева один путь $\sigma$. Далее среди полученных оптимальных значений собственного капитала выбирается минимальное значение и соответствующие ему сценарии $\Sigma_{min}^*(m)$. Решение задачи (10) будем называть минимаксным.

Можно доказать, что

$$R_{adj}^*(m) = R_{min}^*(m), V_{adj}^*(T; m) \cap V_{min}^*(T; m) \neq \emptyset,$$

где $V_{min}^*(T; m) = \{v_\sigma(T), \sigma \in \Sigma_{min}^*(m)\}$ – множество терминальных вершин дерева, в которые ведут маршруты, доставляющие решение минимаксной задаче.

## 3. Численный пример

Рассмотрим основные положения принципа построения сценарного дерева, которое мы будем использовать в расчётах. Общее неопределённое состояние внешней среды характеризуется переменной $\xi(t)$, принимающей в отличные от начального момента времени одно из двух возможных значений: $-1$, $+1$. Достаточно условно для предприятия первое из них можно ассоциировать с неблагоприятным состоянием, а второе – с благоприятным. Начальному моменту времени сопоставляется нейтральное состояние $\xi(0) = 0$.

Каждый узел $v$ дерева задаётся реализациями переменной $\xi(t)$ от начального момента $t = 0$ до момента $l(v)$, соответствующего уровню дерева, на котором этот узел располагается. Таким образом, можно записать: $v = \left(\xi(t),\ t = 0, \dots, l(v)\right)$.

В такой форме корень определяется как $v_r = (0)$, а каждая терминальная вершина – набором значений $(\xi(t),\ t = 0, \dots, T)$. Сценарию $\sigma$ ставится в соответствие одна из $2^T$ возможных таких последовательностей и путь от корня до некоторого листа. Всего рассматриваемое бинарное дерево содержит $2^{T+1} - 1$ узла. Текущее состояние неопределенности в узле $v$ обозначается через $s(v)$ и определяется последней компонентой набора, которым задаётся данный узел.

Рассмотрим, например, узел $v' = (0, -1, -1, -1)$ (предполагая, что $T \geq 3$). Он расположен на уровне $t = 3$ и текущее состояние неопределённости в этом узле $s(v') = -1$. Через него проходит $2^{T-3}$ маршрута от корня до вершин терминального уровня, один из которых соответствует “крайнему” сценарию с $\xi(t) = -1,\ t = 1, \dots, T$.

Выполним вначале простой тестовый расчёт. Примем шаг модели равным одному кварталу и положим $T = 12$, что соответствует горизонту планирования в три года. Тогда полученное бинарное дерево будет содержать 8192 узла, из которых 4096 являются листьями.

Зададим в его узлах ставки депозитов и кредитов. Тот же способ задания и те же значения будут использоваться для этих ставок в узлах бинарного дерева, используемого и в расчёте на самой модели экспортного предприятия. В начальный момент времени, то есть в корневом узле $v_r = (0)$, депозитная ставка задается как $\zeta^d(v_r) = 4\%$, а кредитная – как $\zeta^c(v_r) = 7\%$. Ставки, которые присутствуют в модели (депозитов, кредитов, а также введённые далее ставки изменения рыночных цен продуктов), указываются в процентах годовых, с добавлением значка процента после числа. В остальных вершинах: с текущим состоянием $-1$ установим для депозитной и кредитной ставок значения 3% и 8%, а в узлах с текущим состоянием $+1$ значения 5% и 6%, соответственно.

В каждой вершине $v$ сценарного дерева при помощи датчика псевдослучайных вещественных чисел, равномерно распределённых на интервале от $-1$ до 1, зададим поток денежных средств $Q^p(v)$ (соответствующие данные мы вынесли в отдельный файл, который разместили в репозитории [8]). Решая задачи (6) и (8) в случае отсутствия субсидирования, получим $R^*_{adj}(0) = -4.96$ и $R^*(0) = -5.02$. На основе (9) рассчитаем минимальные значения субсидий, достаточные для безубыточности предприятия в конечный момент: $m^*_{adj} = 4.29$, $m^* = 4.33$.

Построим графики зависимостей собственного капитала от времени, полученные при решении двух рассматриваемых задач, в случае отсутствия субсидирования (рис. 1) и при минимальном достаточном субсидировании (рис. 2).

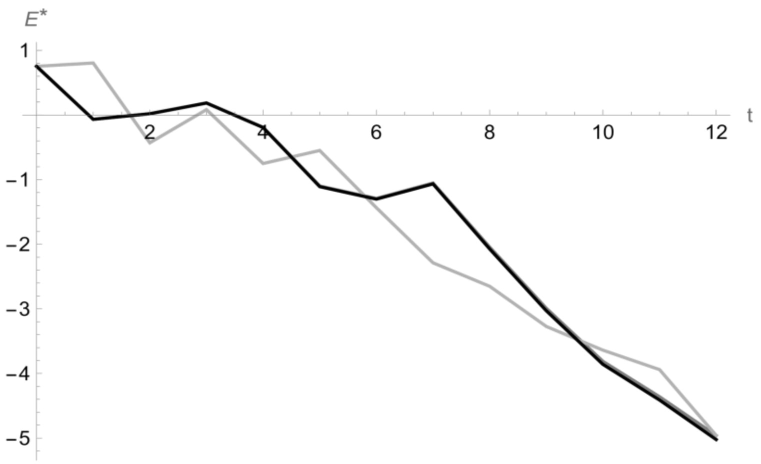


*Рис. 1. Зависимость собственного капитала от времени в тестовом примере при двух регулируемых робастных решениях (серые кривые) и при робастном решении (чёрная кривая) без субсидирования*

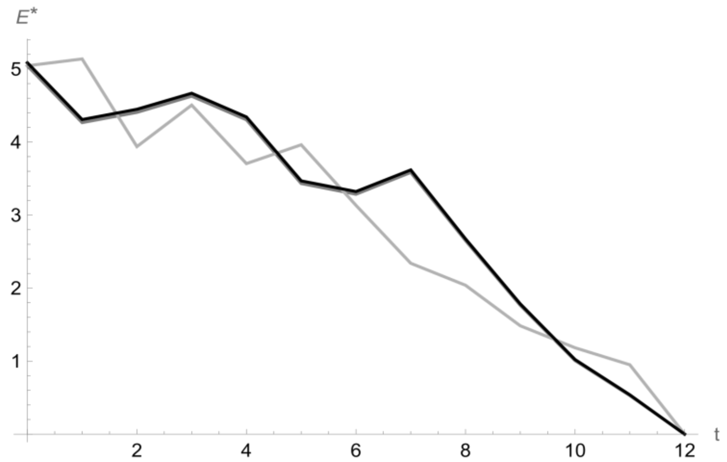


*Рис. 2. Зависимость собственного капитала от времени в тестовом примере при двух регулируемых робастных решениях (серые кривые) и при робастном решении (чёрная кривая) в случае минимального достаточного субсидирования*

Траектории, изображённые на первом рисунке серым цветом, соответствуют двум решениям (из трёх возможных) задачи в регулируемой робастной постановке – управлениям $\bar{\boldsymbol{u}}^*_{adj}(v^{\lessdot}_{3696}(12);0)$, $\bar{\boldsymbol{u}}^*_{adj}(v^{\lessdot}_{1488}(12);0)$ и соответствующим реализациям неопределённых факторов $\bar{\boldsymbol{w}}^*_{adj}(v_{3696}(12);0)$, $\bar{\boldsymbol{w}}^*_{adj}(v_{1488}(12);0)$. Минимаксное решение здесь соответствует кривой, которая "ближе" к чёрной и на рисунке едва отличима от нее. Естественно, что на обоих решениях конечный собственный капитал будет равен $R^*_{adj}(0) = -4.96$. Чёрным цветом выделена траектория, рассчитанная при решении задачи в робастной постановке, то есть при управлении $\bar{\boldsymbol{u}}^*(11;0) = \left(\boldsymbol{u}^*(0;0), \dots, \boldsymbol{u}^*(11;0)\right)$ и реализации неопределённых факторов $\bar{\boldsymbol{w}}^*(v_{3696}(12);0)$.

В случае субсидирования число сценариев, доставляющих решение задаче (6) значительно больше, чем в случае без субсидирования. Среди них мы выделили те же два сценария, которые использовали ранее. Субсидирование сдвигает эти кривые в область неотрицательных значений так, что терминальное значение собственного капитала, полученное при решении каждой из задач, становится равным нулю. Минимаксное решение здесь опять же соответствует той серой кривой, которая значительно ближе к чёрной. На обоих рисунках мы использовали линейную интерполяцию между соседними точками.

Расчёт на модели экспортного предприятия будем проводить в предположении, что предприятие использует в своей деятельности продукты трёх видов, то есть $|I| = 3$. Несколько сократим временной горизонт, выберем $T = 9$. Сценарное дерево в таком случае будет содержать $1023$ узла, из которых $512$ располагаются на терминальном уровне. Перейдём к заданию неопределённых факторов в каждом узле этого дерева.

Поставщики и покупатели продукта данного вида, формируя соответственно предложение и спрос, ориентируются на его рыночную цену. Начальные цены продуктов $\tilde{c}_i(0)$, $i = 1, \dots, 3$ зададим равными $\{1, 1.5, 2\}$. Здесь каждая компонента такого набора равна рыночной цене соответствующего продукта. Будем и далее использовать подобную запись, специально не оговариваясь.

Рыночная цена $i$-го продукта в последующие моменты времени задаётся рекуррентной формулой:

$$\tilde{C}_i(0) = \tilde{c}_i(0),\ \tilde{C}_i(t) = \tilde{C}_i(t-1)\,(1+\mu_i)^{\xi(t)},\quad t = 1, \dots, 9,$$

где $\mu_i$ – некоторая постоянная ставка изменения рыночной цены продукта $i$. Установим для этих величин следующие значения, выраженные в процентах годовых: $\{5\%, 10\%, 15\%\}$.

Реализацию процесса (1) в узле $v$ будем обозначать через $\tilde{c}_i(v)$. Корню дерева, $v_r = (0)$, соответствует фиксированная цена $\tilde{c}_i(0)$. Рассмотрим, например, $v' = (0, -1, -1, +1)$ и на основе предыдущего уравнения определим в этой вершине рыночную цену:

$$\tilde{c}_i(v') = \tilde{c}_i(0)\,(1+\mu_i)^{-1} \cdot (1+\mu_i)^{-1} \cdot (1+\mu_i) = \tilde{c}_i(0)\,(1+\mu_i)^{-1}.$$

Количества поставщиков и заказчиков, доступных предприятию для продукта вида $i$ в узле $v$, обозначим через $N_i^+(v)$ и $N_i^-(v)$. В момент $t = 0$ для каждого продукта присутствовало по 10 поставщиков и заказчиков. В остальных узлах дерева эти количества задавались табличным способом при помощи датчика псевдослучайных целых чисел (как и значения потоков денежных средств из тестового примера эти данные расположены в [8]). И для поставщиков, и для заказчиков соответствующие количества изменяются в пределах от 5 до 10 для вершин с текущим состоянием $-1$, и от 10 до 15 для вершин с текущим состоянием $+1$. Что можно интерпретировать как меньшую деловую активность в неблагоприятном текущем состоянии и большую – в благоприятном.

Будем считать, что цены, по которым предприятие покупает продукты у поставщиков и продаёт заказчикам, в каждом узле дерева равномерно заполняют некоторые интервалы значений. Границы этих интервалов устанавливаются исходя из рыночных цен в данному узле. Предположим, что поставщики расставлены в порядке возрастания, а заказчики – в порядке убывания предлагаемых ими цен за одну единицу продукта. В упорядоченном наборе поставщиков лучшая для предприятия (первая) цена предложения вводится как произведение коэффициента $\eta_i^+(v)$ на рыночную цену $\tilde{c}_i(v)$, а худшая (последняя) цена, которая задает правую границу соответствующего интервала, как произведение коэффициента $\gamma_i^+(v)$ на первую цену. Аналогично задаются границы интервала значений для цены продажи продукта заказчикам, однако в данном случае первая цена задаёт правую границу интервала, а последняя – левую. Сказанное позволяет выписать для элементов двух отсортированных массивов цен в вершине $v$ следующие формулы:

$$c_1(v) = \eta(v)\,\tilde{c}(v),\, c_n(v) = (1 + (\gamma(v) - 1)\,(n-1)/(N(v) - 1)),\quad n = 1, \dots, N(v).$$

Здесь в формулах для цен и далее для количеств продуктов, которые характеризуют предложение поставщиков и спрос заказчиков, во избежания нагромождения символов, мы опускаем у соответствующих величин нижний индекс вида продукта и верхний идентификатор “$+$” или “$-$”.

В начальный момент времени коэффициенты $\eta_i^+(v_r)$, $\eta_i^-(v_r)$ полагаются равными 1 и 1.2 соответственно. В остальных узлах: с текущим состоянием $s(v) = -1$ зададим для них значения 1.05 и 1.15, а в узлах с $s(v) = +1$ значения 0.95 и 1.25. Коэффициенты, которые определяют последние цены поставщиков и заказчиков, устанавливаются так: $\gamma_i^+(v) = 1.3, \gamma_i^-(v) = 1/1.3$. При таком выборе коэффициентов относительная длина диапазона цен обоих видов (для данного вида цен – это разность между наибольшей и наименьшей, делённая на наименьшую) остаётся постоянной для всех узлов дерева. При этом относительная длина диапазона “перекрёстных” цен (разность между лучшей ценой продажи и лучшей ценой покупки, делённая на вторую из названных) в положительных узлах больше, чем в отрицательных.

Далее задаются переменные $\chi_{i,n}^+(v)$, $\chi_{i,n}^-(v)$, которые для продукта $i$-го вида в узле $v$ определяют предложение поставщика и спрос заказчика с порядковым номером $n$. Сперва фиксируются их значения $\chi_{i,1}^+(v)$, $\chi_{i,1}^-(v)$, соответствующие первой цене ($n = 1$), как некоторые целые положительные числа. Затем вводятся параметры $\alpha_i^+(v)$, $\alpha_i^-(v)$, которые характеризуют в некотором смысле кривизну “кривых” предложения и спроса. Для других номеров $n$ значения этих переменных определяются на основе одной из двух зависимостей:

$$\chi_n(v) = \left\lceil \chi_1(v)\, n^{\alpha(v)} \right\rceil,\ 0 \le \alpha(v) \le 1;$$

$$\chi_n(v) = \left\lfloor \chi_1(v)\, (1-(n-1)/N(v))^{-\alpha(v)} \right\rfloor,\ \alpha(v) \ge 0.$$

В этих формулах $n$ пробегает значения от 1 до $N(v)$, и каждая величина $\chi_n(v)$ выражается целым положительным числом. В первой формуле присутствует функция “потолок” $\lceil\cdot\rceil: x \to \lceil x\rceil$, которая определяется как наименьшее целое, большее или равное $x$. Во второй формуле используется обозначение для функции “пол” $\lfloor\cdot\rfloor: x \to \lfloor x\rfloor$ – это наибольшее целое, меньшее или равное $x$.

Монотонный характер обеих зависимостей от $n$ позволяет сделать следующий вывод. Поставщику с большим порядковым номером (с более высокой ценой), соответствует предложение не меньше, чем поставщику с меньшим порядковым номером. Заказчику с большим $n$ (с более низкой ценой), соответствует спрос не меньше, чем заказчику с меньшим порядковым номером. Сказанное отражает закономерность: поставщики (продавцы) стремятся продать продукт подороже, а заказчики (покупатели) – приобрести его подешевле.

В последующем расчёте, в каждом узле и для каждого продукта мы использовали первый вариант зависимости $\chi_n(v)$ для поставщиков и второй – для заказчиков.

В начальном состоянии значения $\chi_{i,1}^+(v_r)$, $\chi_{i,1}^-(v_r)$ выбирались равными 5. В других узлах: с текущим отрицательным состоянием, то есть при $s(v) = -1$, равными 4, а в узлах с $s(v) = +1$ равными 6. В корне дерева параметры $\alpha_i^+(v_r)$, $\alpha_i^-(v_r)$ задавались как $\{0.4, 0.45, 0.5\}$. В отрицательных узлах их значения для продуктов трёх видов заполняли массив $\{0.3, 0.35, 0.4\}$, а в положительных – массив $\{0.5, 0.55, 0.6\}$.

Рассмотрим, например, первый продукт и два узла $(0, -1)$, $(0, +1)$, расположенные на первом уровне ($t = 1$). Для наглядности проиллюстрируем полученные зависимости графически (рис. 3, 4).

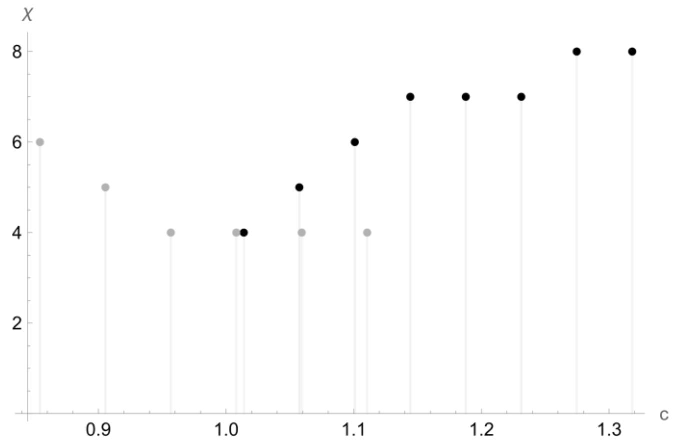


*Рис. 3. Предложение поставщиков и спрос заказчиков для первого продукта в узле* $(0, -1)$

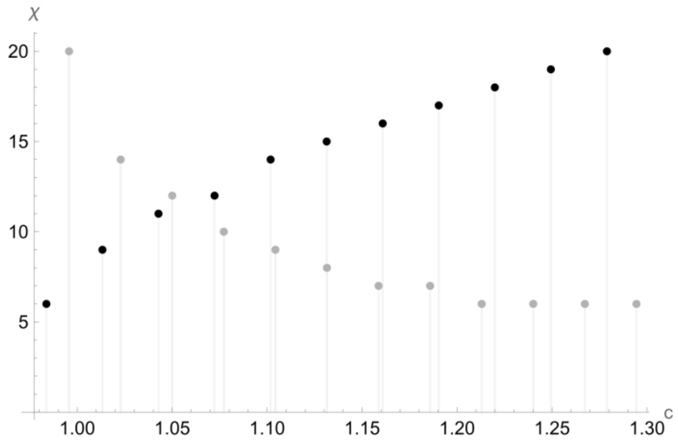


*Рис. 4. Предложение поставщиков и спрос заказчиков для первого продукта в узле* $(0,+1)$

Здесь, для данного узла $v$, по оси абсцисс откладываются цены, а по оси ординат – соответствующие им количества единиц продукта. Каждая чёрная точка задается парой значений $(c_{1,n}^{+}(v), \chi_{1,n}^{+}(v))$ и соответствует предложению некоторого поставщика с данной ценой, а каждая серая точка – парой $(c_{1,n}^{-}(v), \chi_{1,n}^{-}(v))$ и соответствует спросу некоторого заказчика. В данном случае, в узле $(0,-1)$ присутствует 12 поставщиков и 7 заказчиков, а в узле $(0,-1)$ – 10 поставщиков и 7 заказчиков.

Для знаковой переменной, которая в вершине $v$ сценарного дерева определяет взаимодействие предприятия с Центром, используем следующую зависимость: $\delta_i(v) = \left((-1)^{l(v)} - 1\right)/2$. Здесь $l(v)$ обозначает номер уровня, на котором располагается вершина $v$. Этот номер на единицу меньше длины последовательности, описывающей данный узел. Корню дерева соответствует значение знаковой переменной $-1$, а двум узлам первого уровня – значение $0$. Все вершины одного уровня имеют одинаковое значение этой величины. В результате, знаковая переменная, изменяясь со временем, попеременно принимает значения $-1$ и $0$.

Далее, в каждом узле $v$ для $i$-го продукта решается транспортная задача (1) и рассчитывается поток денежных средств предприятия по операциям купли-продажи продукта данного вида. Например, в узле $v' = (0,+1,-1,+1)$ для трёх потоков $Q_i^{p*}(v')$ мы получим $\{2.526, 3.336, -2.275\}$. Полный поток определяется суммированием частных и в этом узле будет равен $3.587$.

Следует отметить следующий факт. Хотя для всех узлов уровня $t = 3$ (на нём расположен рассматриваемый узел $v'$) и для каждого продукта знаковая переменная равна 0, а соответствующие задачи (1) содержат ограничения-равенства, частные потоки (оптимальное значение критерия) могут быть как как отрицательными, так и положительными.

На рис. 5 изображены рассчитанные временные развёртки суммарного потока денежных средств предприятия для трёх произвольно выбранных сценариев.


*Рис. 5. Зависимость суммарного потока денежных средств экспортного предприятия от времени для трёх произвольно выбранных сценариев*

Теперь мы можем повторить всю процедуру расчёта, выполненную для тестового примера. Решая задачи (6) и (8) в случае отсутствия субсидирования, получим $R_{adj}^{*}(0) = -100.31$ и $R^{*}(0) = -101.37$.

С использованием итерационной процедуры рассчитаем минимальные значения субсидий, при которых решения этих задач становятся неотрицательными: $m^*_{adj} = 89.74$, $m^* = 90.27$.

Построим графики зависимостей собственного капитала экспортного предприятия от времени, полученные при решении двух рассматриваемых задач, в случае отсутствия субсидирования (рис. 5) и при минимальном достаточном субсидировании (рис. 6).

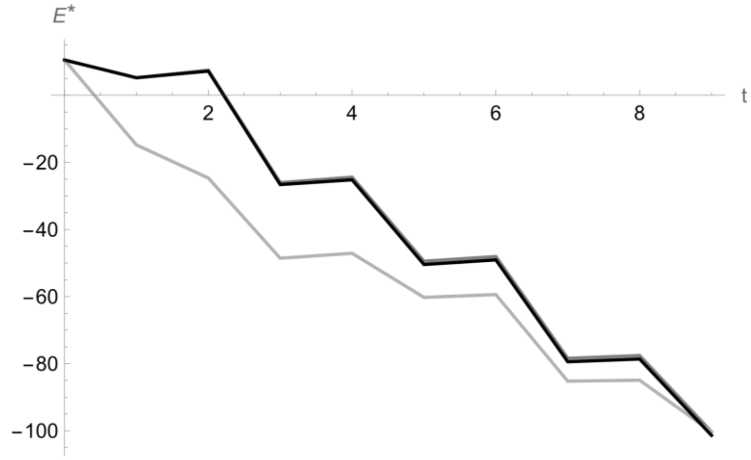


*Рис. 6. Зависимость собственного капитала от времени экспортного предприятия при регулируемых робастных решениях (серые кривые) и робастном решении (чёрная кривая) без субсидирования*

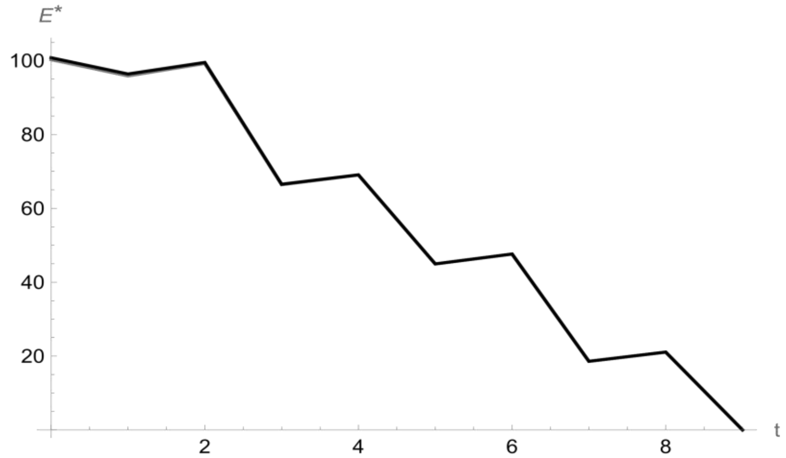


*Рис. 7. Зависимость собственного капитала от времени экспортного предприятия при регулируемом робастном решении (серая кривая) и робастном решении (чёрная кривая) в случае минимального достаточного субсидирования*

В регулируемой робастной постановке без субсидирования задача для экспортного предприятия имеет два решения. Соответствующие им траектории собственного капитала выделены на рисунке серым цветом. Минимаксное решение, как и в тестовом примере, соответствует кривой, которая “ближе” к чёрной – траектории собственного капитала при робастном решении. Различие между этими траекториями становится лучше заметным уже ближе к концу временного интервала.

В случае минимального достаточного субсидирования в задаче (6) присутствует только одно решение, оно совпадает с минимаксным (10). На последнем рисунке расхождение между траекториями собственного капитала присутствует в первые пять моментов времени (хотя здесь его уже совсем сложно выделить); с момента $t = 5$ значения собственного капитала для двух решений совпадают и в конечный момент времени достигают нуля.

## 4. Заключение

В работе предложен вычислительный инструмент построения гарантирующих управлений в простейшей модели экспортного предприятия. Сопутствующая методология может быть применена и при всевозможных усложнениях модели. Эти усложнения можно вести в двух направлениях: по части общей задачи распределения денежных средств предприятия при заданных потоках и по части подзадач распределения продуктов, на основе решения которых эти потоки определяются. Рассмотрим эти усложнения более детально.

В первом направлении можно включить в рассмотрение более сложные финансовые инструменты, которые присутствовали в первоначальном варианте модели экспортного предприятия – это депозиты и кредиты с разными сроками и функциями выплат. В таком случае появляются новые фазовые переменные, и запись динамической системы несколько усложняется. Также можно учитывать ограничения на суммарные обязательства предприятия. В этом случае, при нулевом начальном условии для кассы предприятия (вариант без субсидирования), выполняя вычислительные эксперименты, мы часто сталкиваемся с тем, что ограничения поставленных задач линейного программирования становятся несовместными. Однако введение субсидирования в такой ситуации помогает “подправить” множество допустимых управлений.

Во втором направлении изменения модели нельзя исключать обстоятельства, когда некоторые заказчики запрещают принимать продукты от определённых поставщиков. В таком случае в транспортные подзадачи можно или ввести дополнительные ограничения-равенства, которые будут фиксировать значения варьируемых переменных с индексами из “блокирующих” списков равными нулю, или скорректировать коэффициенты при этих переменных в самом критерии.

Также представляет интерес учёта в модели транзакционных издержек, которые предприятие может понести при распределении продуктов. Такими издержками могут быть, например, затраты по доставке продуктов от поставщика к заказчику. Если считать, что предприятие при доставке любого (отличного от нуля) количества продуктов платит заданную сумму денежных средств, то целевые функции оптимизационных подзадач будут иметь нелинейный вид. Возникающие при этом задачи с фиксированными доплатами приходится уже решать методами, разработанными специально для задач целочисленного линейного программирования.

## Литература


1. *Ерешко Ф.И., Сытов А.Н., Козлов В.В.* Имитационная модель экспортного предприятия // Анализ, моделирование, управление, развитие социально-экономических систем: сборник научных трудов XVII междунар. школы-симпозиума АМУР-2023. – С. 147-152.
2. *Сытов А.Н.* Построение гарантирующих управлений в модели производственной подсистемы предприятия // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD’2023): труды Шестнадцатой междунар. конф. – М.: ИПУ РАН, 2023. – С. 521–530.
3. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. – М.: Наука, 1971. – 384 с.
4. *Ihsan Yanikoglu, Bram L. Gorissen, Dick den Hertog*. A survey of Adjustable Robust Optimization // European Journal of Operational Research. – 2019. – Vol. 277, I. 3. – P. 799–813.
5. *G. M. Appa.* The Transportation Problem and Its Variants // Operational Research Quarterly. – 1973. – Vol. 24, No. 1. – P. 79–99.
6. *Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В*. Исследование операций: учеб. пособие для студ. вузов. – М.: Издательский центр “Академия”, 2008. – 464 с.
7. *Еремин И.И.* Линейная оптимизация и системы линейных неравенств: учеб. пособие для вузов. – М.: Издательский центр “Академия”, 2007. – 256 с.
8. URL: https://github.com/an-sytov/MLSD2024