

## СЕКЦИЯ 5

### НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ КРУПНОМАСШТАБНЫМИ СИСТЕМАМИ

---

#### ОЦЕНИВАТЕЛЬ НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ С БАРЬЕРНЫМИ ЗАКОНАМИ ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ЦЕПОЧЕК ПОСТАВОК С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

**Андрианова О.Г.,**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия*

andrianova@ipu.ru

**Чаирез И.Х.,**

*Монтеррейский технологический институт, Гвадалахара, Мексика*

isaac.chairez@tex.mx

**Позняк А.С.**

*Центр научных исследований и переподготовки кадров Национального политехнического  
института, Мехико, Мексика*

apoznyak@ctrl.cinvestav.mx

*Аннотация. Разработан оценщик на основе дифференциальных нейронных сетей для аппроксимации динамики систем с учетом ограничений на состояния. Дифференциальные законы обучения для вышеупомянутой нейронной сети получены с использованием барьерных функций Ляпунова. Построен оценщик для трехуровневой модели нелинейной цепочки поставок в непрерывном времени.*

*Ключевые слова: цепочки поставок, дифференциальные нейронные сети, барьерные функции Ляпунова.*

#### **Введение**

Рыночные системы в последнее время становятся все более сложными и изменчивыми. Эффективное управление цепочками поставок имеет решающее значение для удовлетворения требований современной высококонкурентной и динамичной корпоративной среды. В современной индустрии цепочки поставок должны развиваться, а повторяющиеся или выполняемые вручную действия могут и должны быть автоматизированы. Для достижения стратегических целей компании процесс принятия решений должен быть интегрирован в режим ее штатного функционирования.

Теория управления может помочь лицам, принимающим решения, повысить эффективность и качество процессов, а также улучшить отклики клиентов. Активное управление цепочками поставок может быть достигнуто с помощью технологий управления сетевой активностью для достижения долгосрочного конкурентного преимущества с учетом возможных трудностей и изменений. Для достижения долгосрочных стратегических целей компании в основе цепочки поставок лежат две взаимосвязанные функции – производство и дистрибуция.

Цепочки поставок с непрерывной динамикой (ЦПН) являются актуальным и интересным примером для развития и расширения методов математического моделирования, автоматического управления и устойчивости. В математическом моделировании для методов, ориентированных на управление на основе моделей, подходят обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ), разностные уравнения и уравнения в частных производных. Классически для описания динамики ЦПН использовали линейные параметрические модели, но постоянно усложняющиеся системы показывают, что линейных моделей не всегда достаточно для точного описания реальной динамики, поэтому нелинейные системы начинают использовать как математические модели для описания цепочек поставок. Идеи представления цепочек поставок в виде нелинейных ОДУ можно найти в [1, 2]. Нелинейная модель Форрестера для такой системы с непрерывным временем представлена в [3], в то время как модели взаимодействия производителя, дилера, розничного продавца и рынка в дискретном и непрерывном времени описаны в [4, 5].

Сложная система, такая как ЦПН, состоит из множества взаимосвязанных подсистем, и общие характеристики системы не могут быть представлены только динамическим поведением отдельных ее частей. В целом, интегрированная система цепочки поставок охватывает все управленческие операции, связанные с разработкой продукта, закупками, производством и логистикой, а также информационные системы, необходимые для координации этих сетевых действий. Сложность ЦПН требует внедрения эффективных инструментов моделирования, которые могут быть использованы для уточнения математической модели, описывающей конкретную систему цепочки поставок.

Искусственные нейронные сети с непрерывной динамикой, также известные как дифференциальные нейронные сети (ДНС), могут использоваться в качестве эффективных инструментов для воспроизведения динамики ЦПН, которые представлены моделями с неизвестными параметрами или подвержены влиянию внешних возмущений. Предлагаемая ДНС должна учитывать ограничения для всех состояний в ЦПН, а именно положительность всех переменных состояния в каждый момент времени.

Основные результаты данного исследования заключаются в:

а) разработке ДНС с положительной динамикой, которая могла бы воспроизводить динамику ЦПН;

б) получении законов обучения для ДНС с положительной динамикой на основе барьерных функций Ляпунова.

## 1. Математическая модель цепочки поставок с непрерывной динамикой

Следующая нелинейная модель цепочки поставок предложена в [5]:

$$\dot{x}(t) = my(t) - (m + 1)x(t) + h_x(x, y, z, t), \quad (1)$$

$$\dot{y}(t) = x(t)(r - z(t)) - y(t) + h_y(x, y, z, t), \quad (2)$$

$$\dot{z}(t) = x(t)y(t) - (1 - k)z(t) + h_z(x, y, z, t), \quad (3)$$

$$\omega_p(t) = Pr_p\{\omega(t)\}, \quad \omega \in \{x, y, z\}, \quad (4)$$

где параметры модели  $k$ ,  $r$  и  $m$  могут быть неизвестны или частично известны, они ограничены сверху положительными константами  $k^+$ ,  $r^+$  и  $m^+$ . Эти параметры представляют собой коэффициент страхового запаса у производителя, уровень искажения информации у дистрибьютора и уровень удовлетворенности заказами клиентов у розничного продавца, соответственно. Переменная  $x(t)$  – это количество товаров, которые требуются розничному продавцу,  $y(t)$  – количество товаров, которые может поставить дистрибьютор, а  $z(t)$  – количество товаров, которые может произвести производитель в зависимости от заказа. Здесь  $h_i(x, y, z, t)$  описывает аддитивные неопределенности, ограниченные по норме,  $i \in \{x, y, z\}$ . Такие возмущения имеют квазипериодическую (гармоническую) природу и могут представлять собой сезонные колебания.

Оператор проектирования  $Pr_p$  округляет действительное число  $\omega$  до ближайшего к нему целого положительного значения. Применение этого оператора позволяет представить динамику элементов цепочки поставок в более естественном виде.

В уравнении (1) количество товаров  $x(t)$  розничного продавца в текущий момент времени зависит от спроса, который был удовлетворен дистрибьютором в предыдущий момент времени, и от соответствующего количества товаров розничного продавца в предыдущий момент времени, где  $m$  показывает удовлетворенность потребительского спроса. В уравнении (2) на количество товаров  $y(t)$ , которое дистрибьютор может поставить в текущий момент времени, влияет совокупный эффект произведения  $x(t)z(t)$  количества товаров розничных продавцов  $x(t)$  и количества произведенных товаров  $z(t)$  производителями в предыдущий момент времени, который приводит к возникновению квадратичной нелинейности. Дистрибьютор принимает во внимание, что информация о товаре, полученная от розничного продавца, может быть искажена на  $rx(t)$ . В уравнении (3) количество продукции при данных допущениях зависит от количества товаров дистрибьютора и страхового запаса. Заказ дистрибьютора снова зависит от количества товаров розничного продавца в предыдущий момент времени, поэтому производителю следует учитывать совокупный эффект от количества продукции розничного продавца и дистрибьютора при условии, что доля страхового запаса составляет  $kz(t)$ .

Внешние возмущения и ошибки моделирования  $H \in \mathbb{R}^3, H(X(t), t) = [h_x \ h_y \ h_z]^T$ , где  $X = [x \ y \ z]^T$ , ограничены по норме сверху

$$\|H(X(t), t)\| \leq H^*, H^* \in \mathbb{R}^+. \quad (5)$$

Непрерывная система (1)–(3) эффективно отражает природу ЦПН, но не стоит забывать, что более естественно описывать динамику цепочек поставок в целых числах.

Стоит отметить также, что система (1)–(3) похожа на систему Лоренца, которая имеет хаотические движения в определенном диапазоне параметров системы.

## 2. Представление ЦПН с помощью дифференциальной нейронной сети

Основываясь на приближенном представлении нелинейных систем, предложенном в [5], опишем динамику системы (1)–(3) в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}X(t) = f(X(t)|W_0^a) + \tilde{f}(X(t)|W_0^a) + H(X(t), t). \quad (6)$$

Ошибка моделирования  $\tilde{f}(X(t)|W_0^a)$  ограничена сверху в соответствии с теорией локальной аппроксимации, обоснованной в нескольких исследованиях (например, смотрите [6, 7]):

$$\|\tilde{f}(X(t)|W_0^a)\|_{A_f}^2 \leq \tilde{f}_0, \tilde{f}_0 \in \mathbb{R}^+, 0 < A_f = A_f^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}. \quad (7)$$

Значения весовой матрицы  $W_0^a$  неизвестно, но ограничено сверху положительно определенной матрицей  $W_0^+$  следующим образом:

$$W_0^a A_0 (W_0^a)^T \leq W_0^+, \quad (8)$$

где матрица  $A_0$  является положительно определенной и симметрической.

В соответствии с аппроксимацией, предложенной в [6], номинальная динамика ДНС может быть описана в виде

$$\tilde{f}(X(t)|W_0^a) = (A_0 + A_\theta)X(t) + W_0^a \Psi(X(t)). \quad (9)$$

В уравнении (9) матрицы  $A_0$  и  $A_\theta$  заданы в следующем виде:

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, A_\theta = \begin{bmatrix} -m & m & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix},$$

и описывают линейную часть рассматриваемой системы, которая содержит известные и неизвестные параметры,  $W_0^a \in \mathbb{R}^{3 \times l}$  и  $\Psi(X(t)): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^l$  – это весовая матрица и вектор функций активации. Эта часть системы используется для аппроксимации нелинейностей и неопределенностей, которые не учитываются линейной частью системы. Размерность  $l$  может быть оценена или предоставлена разработчиком системы. Обратим внимание на то, что матрица  $A_\theta$  может быть представлена в виде

$$A_\theta = mA_m + rA_r + kA_k, \quad (10)$$

$$A_m = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Предположим, что существуют веса  $W_0$  такие, что следующая оптимизационная задача имеет по крайней мере одно решение:

$$W_0 = \operatorname{argmin}_{W_0^a \in \mathbb{R}^{3 \times l}} \|\tilde{f}(X(t)|W_0^a)\|. \quad (11)$$

Отметим, что переменные состояния аппроксимированной модели равны тем, которые описывает система (1)–(3). Это означает, что доступные измерению переменные являются наиболее близкими целыми числами к тем, которые получены в результате непрерывного изменения динамики цепочки поставок.

**Задача,** рассматриваемая в этом исследовании, заключается в разработке смешанного оценителя для параметров матрицы линейной аппроксимации  $A_\theta(m, r, k)$  и весовой матрицы  $W_0$  для заданного вектора функций активации так, чтобы система (6) воспроизводила динамику системы (1)–(3). Задача должна быть решена с учетом того, что переменная  $X_p = [Pr_p\{x} \ Pr_p\{y} \ Pr_p\{z}]^T$  представляет собой вектор, образованный целыми положительными числами. Учитывая природу ЦПН, все компоненты  $X_p$ , а именно  $X_{p,i}$ , удовлетворяют следующим ограничениям:

$$0 < X_{p,i} < X_{p,i}^+, X_{p,i}^+ \text{ известны.} \quad (12)$$

### 3. Построение барьерных законов обучения

Чтобы построить аппроксимацию динамики цепочки поставок, зададим вспомогательный вектор  $\hat{X} \in \mathbb{R}^3$ , который представляет собой вектор состояния оценщика, основанного на ДНС, для положительных систем с целыми значениями. Требуемые законы обучения для корректировки весов должны зависеть от изменения во времени ошибки идентификации  $\Delta = X - \bar{X}$ , возникающей из-за разницы между состояниями оценщика и системы с неопределенностью до использования оператора проектирования. Оценщик, основанный на ДНС, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{X}(t) &= A_0 \hat{X}(t) + W(t) \Psi(\hat{X}(t)) + (\hat{m}(t)A_m + \hat{r}(t)A_r + \hat{k}(t)A_k) \hat{X}(t) + L\Delta_P(t), \\ \hat{X}(t) &= Pr_{\Omega} \{\bar{X}(t)\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\bar{X}(t)$  – дополнительная переменная состояния, а оператор проектирования удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} Pr_{\Omega} \{\bar{X}\} &= \{Pr_{\Omega_i} \{\bar{X}_i\} \mid i = \overline{1,3}\}, \\ Pr_{\Omega_i} \{\bar{X}_i\} &= \begin{cases} \bar{X}_i, & \text{если } \bar{X}_i \in \Omega_i, \\ \hat{X}_{\partial,i}, & \text{если } \bar{X}_i \notin \Omega_i, \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\hat{X}_{\partial,i} \in \Omega_i$  задана условием  $\hat{X}_{\partial,i} = \min_{X_i \in \Omega_i} \|\bar{X}_i - X_i\|^2$ . В нашем случае все спроектированные элементы снизу ограничены нулем. Обратим внимание на то, что  $\hat{X}_{\partial,i}$  можно рассчитать онлайн в зависимости от множества  $\Omega_i$ , которое представляет собой диапазон изменения  $i$ -ой компоненты вектора состояния  $X$ , определяемой как

$$0 < X_i(t) < X_i^+ \quad \forall t \geq 0.$$

Верхний предел  $X_i^+ \in \mathbb{R}^+$  известен заранее. Здесь стоит упомянуть, что вспомогательная переменная  $\bar{X}$  дифференцируема, в то время как  $\hat{X}$  – нет.

Переменная  $\Delta_P$  определяет прогнозируемую ошибку, полученную в виде  $\Delta_P = X_P - \hat{X}$ , а  $L \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – это коэффициент коррекции, который учитывает доступную информацию.

В (13) весовая матрица  $W(t) \in \mathbb{R}^{3 \times l}$  зависит от времени, а сигмоидальный вектор функций активации  $\Psi$  имеет компоненты вида

$$\Psi_j(X(t)) = \frac{a_j}{1 + b_j e^{-c_j^T X}}, \quad j = \overline{1, l}. \quad (15)$$

Параметры  $a_j$  и  $b_j$  – положительные константы, а  $c_j \in \mathbb{R}^3$  – вектор постоянных параметров. Вектор функций активации удовлетворяет условию  $\|\tilde{\Psi}(X_1, X_2)\|_{\Lambda_\Psi}^2 \leq L_\Psi \|X_1 - X_2\|^2$ , где  $\tilde{\Psi}(X_1, X_2) = \Psi(X_2) - \Psi(X_1)$ ,  $L_\Psi$  – положительный заданный скаляр, а  $\Lambda_\Psi$  – положительно определенная матрица,  $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^3$ . Функция  $\Psi(X)$  глобально ограничена в  $\mathbb{R}^3$ , то есть  $\|\Psi(X)\|_{\Lambda_\Psi}^2 \leq L_\Psi^+$ , где  $L_\Psi^+$  – известная константа.

В выражении (10) параметры матрицы Гурвица  $A_\theta$  и изменяющиеся во времени весовые функции  $W(t)$  должны быть оценены, чтобы гарантировать

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \min_{W_0^a \in \mathbb{R}^{3 \times l}} \|\Delta\|^2 \leq \rho,$$

где  $\rho > 0$ . Стоит также отметить, что  $\|\Delta_P(t)\| \leq \|\Delta(t)\| + c$ . Здесь  $c$  – положительная константа, зависящая от алгоритма округления. Если рассматривать традиционное округление, то  $c = 2\sqrt{3}$ . Введем обозначение  $\Delta_i = i - \hat{i}$  для  $i$ -ой составляющей  $\Delta$  с  $i \in \{m, r, k\}$ . Используя (6), (10) и (13), пропуская часть преобразований в виду ограничений на размер статьи, получим динамику производной ошибки  $\frac{d}{dt} \Delta(t)$ , из которой будут выведены дифференциальные законы обучения, в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \Delta(t) &= (A_0 - L)\Delta(t) + (A_0 - L) (\bar{X}(t) - \hat{X}(t)) + \\
&A_m \left( \Delta_m (X(t) - \bar{X}(t) + \hat{X}(t)) + \hat{m}(t)\Delta(t) \right) + \\
&A_r \left( \Delta_r (X(t) - \bar{X}(t) + \hat{X}(t)) + \hat{r}(t)\Delta(t) \right) + \\
&A_k \left( \Delta_k (X(t) - \bar{X}(t) + \hat{X}(t)) + \hat{k}(t)\Delta(t) \right) + \\
&(m + r + k) (\bar{X}(t) - \hat{X}(t)) + \\
&(\tilde{\Psi}_v^\top (X(t), \hat{X}(t)) W_{0,v}^a + \Psi_v^\top (\hat{X}(t)) \tilde{W}_v(t)) + \\
&L(X_p(t) - X(t)) + \tilde{f}(X(t)|W_0^a) + H(X(t), t),
\end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned}
\Psi_v (\hat{X}(t)) &= \left[ \begin{array}{c} \Psi (\hat{X}(t)) \\ \vdots \\ \Psi (\hat{X}(t)) \end{array} \right] \left. \vphantom{\Psi_v} \right\} l \text{ раз}, \quad \tilde{\Psi}_v (X(t), \hat{X}(t)) = \left[ \begin{array}{c} \tilde{\Psi} (X(t), \hat{X}(t)) \\ \vdots \\ \tilde{\Psi} (X(t), \hat{X}(t)) \end{array} \right] \left. \vphantom{\tilde{\Psi}_v} \right\} l \text{ раз}, \\
\tilde{W}(t) &= W_0^a - W(t), \quad \tilde{W}_v(t) = \begin{bmatrix} \tilde{W}_1^\top \\ \vdots \\ \tilde{W}_l^\top \end{bmatrix}, \quad W_{0,v}^a = \begin{bmatrix} (W_{0,1}^a)^\top \\ \vdots \\ (W_{0,l}^a)^\top \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Здесь  $\tilde{W}_j$  и  $W_{0,j}^a$  представляют собой  $j$ -ую строку весовых матриц  $\tilde{W}(t)$  и  $W_0^a$  соответственно,  $j = \overline{1, l}$ .

Изменение во времени весовой матрицы  $\tilde{W}(t)$  описывается законом

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \tilde{W}(t) &= -k^{-1} (M_1(t) + M_2(t)), \\
M_1(t) &= H^+(t) P_1 \Delta_P(t) \Psi^\top (\hat{X}(t)), \\
M_2(t) &= H^-(t) P_2 \Delta_P(t) \Psi^\top (\hat{X}(t)),
\end{aligned} \tag{17}$$

где  $k$  – положительная константа,  $P_1$  и  $P_2$  – положительно определенные симметрические, удовлетворяющие следующим дифференциальным матричным уравнениям:

$$\frac{d}{dt} P_k + P_k A + A^\top P_k + P_k R_k P_k + Q_k = 0, \quad 0 < P_k^- \leq P_k \leq P_k^+, \quad k = 1, 2. \tag{18}$$

Матрицы  $P_k^-$  и  $P_k^+$ , являются положительно определенными и ограниченными. Кроме того,  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $A = A_0 - L$  – это матрица Гурвица с заранее выбранными собственными значениями. Краткое обсуждение того, как выбирать эти собственные значения, приведено в [6]. Матрицы  $R_k$  и  $Q_k$  удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}
R_1 &= W_0^+ H^+(t) + H^+(t) (\tilde{f}_0 + H^*), \\
R_2 &= W_0^+ H^-(t) + H^-(t) (\tilde{f}_0 + H^*), \\
Q_1 &= \lambda_{\max} \{A_0\} + Q_a, \quad Q_2 = \lambda_{\max} \{A_0\} + Q_b,
\end{aligned} \tag{19}$$

где  $Q_a, Q_b > 0$ ,  $\lambda_{\max} \{Y\}$  – наибольшее (наименьшее) собственное значение матрицы  $Y$ , а  $H^+(t)$  и  $H^-(t)$  заданы в виде

$$\begin{aligned}
H^+ &= \frac{q(\hat{X} - X^{eq})(1+\kappa)}{(X^+ - (1+\kappa) \|\Delta_P\|_{P_1}^2)^2}, \\
H^- &= \frac{q(\hat{X} - X^{eq})(1+\kappa)}{(X^+ - (1+\kappa) \|\Delta_P\|_{P_2}^2)^2}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Здесь  $q(\hat{X} - X^{eq})$  – выпуклая функция расстояния между  $\hat{X}$  и  $X^{eq} \in \mathbb{R}^3$ , которая принимает значения от 0 до 1,  $q(0) = 0$ ,  $\kappa$  – положительный скаляр.

Законы изменения параметров модели описываются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{i} &= -(N_1(t) + N_2(t)), \quad i \in \{m, r, k\}, \\ N_1(t) &= H^+(t) \left( X(t) - \bar{X}(t) + \hat{X}(t) \right)^\top A_i^\top P_1 \Delta_P(t), \\ N_2(t) &= H^-(t) \left( X(t) - \bar{X}(t) + \hat{X}(t) \right)^\top A_i^\top P_2 \Delta_P(t). \end{aligned} \quad (21)$$

Следующая теорема представляет основной результат этого исследования, касающийся разработки непараметрического оценивателя на основе ДНС для выбранного класса ЦПН.

**Теорема.** Рассмотрим ЦПН, заданную уравнениями в (1)–(4), с ограничениями состояния типа (12), на которую влияет класс неопределенностей  $H(X(t), t)$ , удовлетворяющий неравенству (5). Если существуют положительно определенные решения (18), то состояния непараметрического оценивателя (13) с законами обучения для весов  $\tilde{W}(t)$  (17) и законами корректировки для параметров модели (21), приводят в ноль ошибку идентификации  $\Delta$ , и  $\Delta$  равномерно ограничена в конечном счете (ultimately uniformly bounded) по  $W_{0,v}^a$  за пределами инвариантного множества  $\mathcal{J}_\Delta$ , определяемого

$$\mathcal{J}_\Delta = \{ \Delta \mid \Delta \in \mathbb{R}^3, \|\Delta\| \geq \max\{\beta_+ \alpha_a^-, \beta_- \alpha_b^-\} \}, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_+ &= \sup_{t \geq 0} H^+(t) (\tilde{f}_0 \lambda_f^{-1} + H^*) + c^2 (\|A_0 - L\|^2 + m^+ + r^+ + k^+), \\ \beta_- &= \sup_{t \geq 0} H^-(t) (\tilde{f}_0 \lambda_f^{-1} + H^*) + c^2 (\|A_0 - L\|^2 + m^+ + r^+ + k^+), \\ \alpha_a^- &= \lambda_{\max} (P_1^+ Q_a P_1^+), \quad \alpha_b^- = \lambda_{\min} (P_2^+ Q_b P_2^+). \end{aligned} \quad (23)$$

Доказательство этой теоремы опущено из-за ограничений на размер статьи.

#### 4. Численное моделирование

В ходе численного моделирования была рассмотрена модель ЦПН, представленная в виде (1) – (4), со следующими параметрами и начальными условиями:

$$m = 5.0, \quad r = 7.0, \quad k = 8.0, \quad x(0) = 50.0, \quad y(0) = 15.0, \quad z(0) = 11.0.$$

На рисунке 1 сравниваются траектории для  $x$ ,  $y$  и  $z$ , соответствующие модели цепочки поставок, с траекториями, полученными с помощью оценивателя (13). На рисунке 2 показаны исходные значения неопределенных параметров в модели ЦПН и те, которые получены оценивателем с применением законов обучения (21).

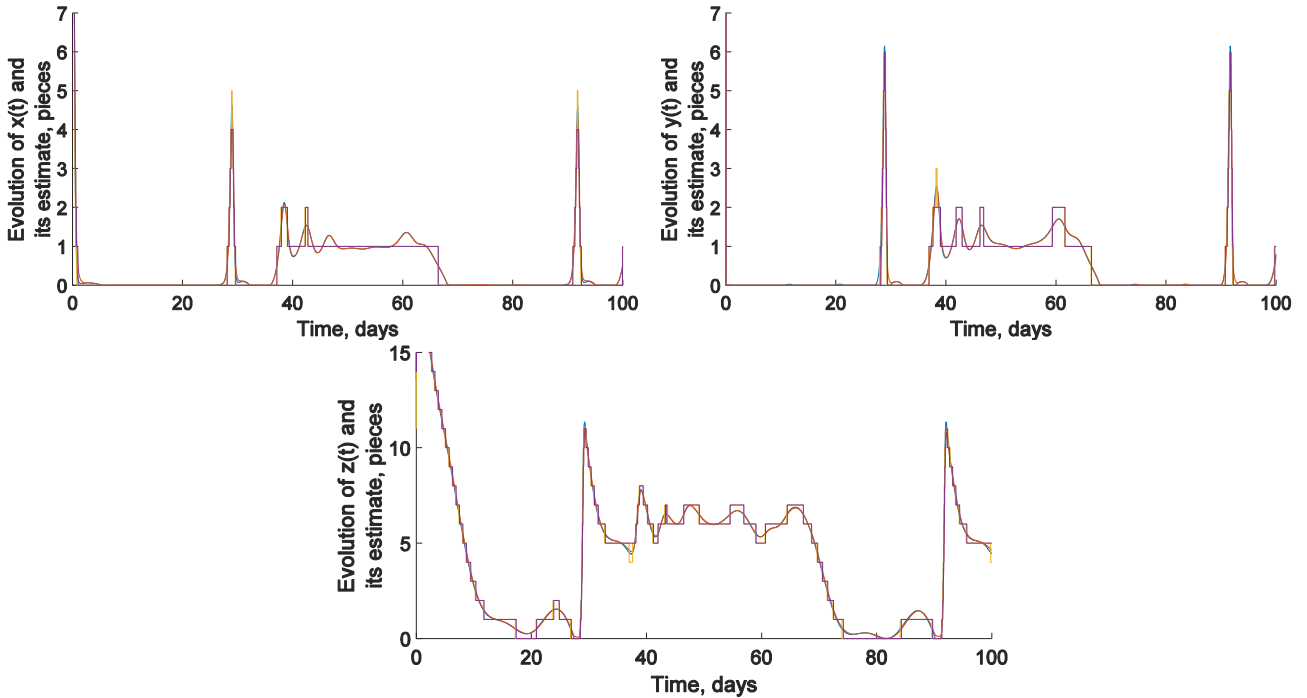


Рис. 1. Сравнение траекторий ЦПН и состояний, полученных с помощью оценивателя ДНС. Здесь красная линия обозначает  $X$ , синяя линия обозначает  $X_r$ , фиолетовая –  $\bar{X}$ , а желтая –  $\hat{X}$

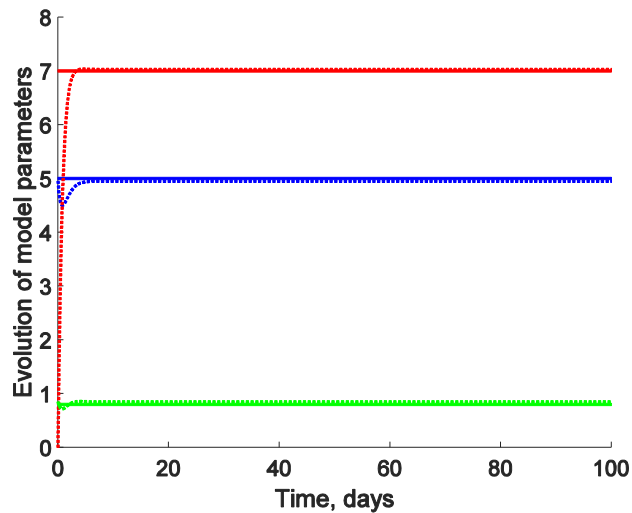


Рис. 2. Значения параметров (сплошная линия) и оценка параметров (пунктирная линия): синий цвет обозначает  $t$ , красный –  $r$ , а зеленый –  $k$

## 5. Заключение

Использование теории устойчивости Ляпунова при проектировании неавтономных систем приводит к созданию новых законов обучения для ДНС, которые могут воспроизводить взаимосвязь входных данных и состояния ЦПН с неточной математической моделью и ограничениями на состояния. Разработанная приближенная модель для ЦПН требует применения нового класса весов, которые были получены с использованием аппарата барьерных функций Ляпунова. Применение функции Ляпунова показывает, что законы обучения активируются в зависимости от текущих траекторий состояний оценщика и что начало координат является устойчивой точкой равновесия для ошибки идентификации. Предлагаемый оценщик является новым в классе непараметрических оценщиков для ЦПН, состояния которых остаются в асимметричной трубке, зависящей от времени.

## Литература

1. Giacomo L.D., Patrizi G. Methodological analysis of supplychains management applications // *European Journal of Operational Research*. – 2010. – Vol. 207, N 1. – P. 249–257.
2. Giacomo L.D., Patrizi G. Dynamic nonlinear modelization of operational supply chain systems // *Journal of Global Optimization*. – 2006. – Vol. 34. – P. 503–534.
3. Cuong T.N., Kim H.-S., Nguyen D.A., You S.-S. Nonlinear analysis and active management of production-distribution in nonlinear supply chain model using sliding mode control theory // *Applied Mathematical Modelling*. – 2021. – Vol. 97. – P. 418–437.
4. Zhang J., Wu Y., Li Q. Production change optimization model of nonlinear supply chain system under emergencies // *Sensors*. – 2023. – Vol. 23, N 7. – <https://www.mdpi.com/1424-8220/23/7/3718>.
5. Pusenjak R., Oblak M. Modelling nonlinear supply chains using methods of system dynamics // *ANALI PAZU*. – 2013. – Vol. 3, N 2. – P. 87–93.
6. Poznyak A.S., Sanchez E.N., Yu W. *Differential neural networks for robust nonlinear control: identification, state estimation and trajectory tracking*. – World Scientific, 2001.
7. Poznyak T.I., Chairez I.J., Poznyak A.S. *Ozonation and Biodegradation in Environmental Engineering: Dynamic Neural Network Approach*. – 1st ed. – Elsevier, 2019.