СРАВНЕНИЕ ДВУХ МЕТОДОВ УПРАВЛЕНИЯ ДВУХЗВЕННЫМ МАНИПУЛЯТОРОМ НА ОСНОВЕ БЛОЧНОГО ПОДХОДА БЕЗ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ¹

Антипов А.С., Грезнев П.П.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия scholess18@mail.ru, greznevp@gmail.com

Аннотация. Предложены два закона управления двухзвенным манипулятором, не требующие решения обратной задачи кинематики. Первый из них обеспечивает асимптотическую сходимость ошибки слежения в предположении, что все параметры объекта известны. Второй – стабилизацию ошибки слежения с заданной точностью при наличии неопределенностей.

Ключевые слова: двухзвенный манипулятор, слежения, обратная задача кинематики, блочный подход, сигмовидное управление, подавление неопределенностей.

Введение

Цель управления роботами-манипуляторами состоит в перемещении конечной точки со схватом и грузом по эталонной траектории. Эту траекторию удобно задавать в рабочем пространстве конечной точки – декартовой системе координат, связанной с основанием робота. Однако выходными (регулируемыми) переменными объекта, как правило, рассматривают обобщенные координаты, которые однозначно определяют положение конечной точки в конфигурационном пространстве робота. Тогда для управления выходными переменными требуется решить обратную задачу кинематики: пересчитать эталонную траекторию из декартовых координат в обобщенные [1]. После решения обратной задачи кинематики для управления могут быть использованы известные методы: ПИД-регулирования [2], оптимального [3], робастного [4], адаптивного управления [5], блочного принципа управления [6].

Однако в большинстве случаев обратная задача кинематики не имеет однозначного аналитического решения. Для манипуляторов с относительно простой конструкцией для ее решения могут быть использованы геометрические подходы [7]. В более сложных случаях применяют численные методы [8–9], что увеличивает вычислительную нагрузку на реализацию системы управления. При этом результат работы численных методов зависит от выбора подходящего начального приближения, и не всегда решение может гарантировать заданную точность. Для решения обратной задачи кинематики также используют нейросетевые подходы [10–12]. Однако результаты сильно зависят от качества обучающей выборки.

В данной работе объектом управления является двухзвенный плоскостной манипулятор, у которого число подвижных звеньев совпадает с числом управляемых координат конечной точки. Цель состоит в разработке метода управления, позволяющего избежать решения обратной задачи кинематики. Для этого предлагается привести исходную модель к блочной форме относительно положения конечной точки в ее рабочем пространстве. На основе данной формы разработаны два закона управления с компенсацией и с подавлением составляющих модели. Первый закон обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы в предположении, что все параметры объекта известны. Для реализации второго закона управления требуется меньше информации о параметрах объекта, допустимо наличие параметрической неопределенности. Этот закон имеет более простой аналитический вид по сравнению с первым. Однако стабилизация ошибки слежения возможна только с заданной точностью. Для уменьшения перерегулирования в обоих законах используются гладкие и ограниченные S-образные функции [13].

Работа имеет следующую структуру. В разделе 1 представлена математическая модель двухзвенного робота-манипулятора без учета динамики исполнительного устройства. Формулируются допущения и поставка задачи. В разделах 2–4 содержатся основные результаты работы: предложено преобразование системы к виду, который позволяет избежать решения обратной задачи кинематики. На основе этого вида разработаны два закона управления, обеспечивающие отслеживание конечной точкой эталонной траектории, заданной в ее рабочей области. В разделе 5 приведены результаты численного моделирования двух замкнутых систем и проведен сравнительный анализ предложенных подходов.

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 24-21-20009).

1. Математическая модель двухзвенного манипулятора и постановка задачи

Математическая модель объекта управления описывается уравнениями Эйлера-Лагранжа [14]:

$$\dot{q}_1 = q_2,$$

 $\dot{q}_2 = H^{-1}(q_1)(u - C(q_1, q_2)q_2 - G(q_1)),$
(1)

где $q_1 = (q_{11}, q_{12})^T$ – вектор положений звеньев манипулятора, $q_2 = (q_{21}, q_{22})^T$ – вектор скоростей; $H(q_1) \in R^{2 \times 2}$ – положительно-определенная нелинейная симметрическая матрица инерции; $C(q_1, q_2) \in R^{2 \times 2}$ – матрица центростремительных и кориолисовых сил, зависящих от вектора обобщенных координат и скоростей; $G(q_1) \in R^{2 \times 1}$ – вектор гравитационных сил, $u \in R^{2 \times 1}$ – вектор обобщенных моментов, который полагается управлением.

Матрицы и векторы системы (1) имеют вид:

$$H(q_{1}) = \begin{pmatrix} (m_{1} + m_{2})l_{1}^{2} & m_{2}l_{1}l_{2}\cos(q_{11} - q_{12}) \\ m_{2}l_{1}l_{2}\cos(q_{11} - q_{12}) & m_{2}l_{2}^{2} \end{pmatrix},$$

$$C(q_{1}, q_{2}) = \begin{pmatrix} 0 & m_{2}l_{1}l_{2}\sin(q_{11} - q_{12}) \\ -m_{2}l_{1}l_{2}\sin(q_{11} - q_{12}) & 0 \end{pmatrix}, G(q_{1}) = \begin{pmatrix} (m_{1} + m_{2})\overline{g}l_{1}\cos q_{11} \\ m_{2}\overline{g}l_{2}\cos q_{12} \end{pmatrix},$$
(2)

где m_i и l_i – массы и длины звеньев соответственно, $i = 1, 2, \ \overline{g} = 9,81$ – ускорение свободного падения.

В модели (1)–(2) не учитываются моменты инерции, возникающие из-за вращения звеньев. Кроме того, не учитывается динамика исполнительных устройств. Однако данная упрощенная модель отражает общие свойства объекта и пригодна для апробации алгоритмов управления.

Выходом является вектор $y_1 = (y_{11}, y_{12})^T$ положений конечной точки манипулятора на плоскости, компоненты которого выражаются через обобщенные координаты:

$$y_{11} = h_1(q_1) = l_1 \cos q_{11} + l_2 \cos(q_{11} + q_{12}),$$

$$y_{12} = h_2(q_1) = l_1 \sin q_{11} + l_2 \sin(q_{11} + q_{12}).$$

Ставится задача синтеза управления u, обеспечивающего отслеживание выходом y_1 известной ограниченной функции $g(t) = (g_1(t), g_2(t))^T$, заданной в системе координат конечной точки. При этом полагается, что помимо выхода y_1 доступны измерения обобщенных координат q_1 , обобщенных скоростей q_2 и производной задающего воздействия $\dot{g}(t)$, которая, как и g(t), является гладкой и ограниченной функцией. Предположения о параметрах объекта управления будут изложены далее.

2. Преобразование модели к блочной форме для синтеза управления, не требующего решения обратной задачи кинематики

Стандартные подходы к построению управления требуют решения обратной задачи кинематики, которая заключается в том, чтобы преобразовать $g_1(t)$, $g_2(t)$ в задающие воздействия для обобщенных координат q_{11} , q_{12} . Затем решается задача стабилизации соответствующих ошибок слежения применительно к системе относительно обобщенных координат (1)–(2). Чтобы не решать обратную задачи кинематики предлагается продифференцировать выход y_1 и от (1)–(2) перейти к следующей системе:

$$\dot{y}_1 = R(q_1)q_2,$$

$$\dot{q}_2 = H^{-1}(q_1)(u - C(q_1, q_2)q_2 - G(q_1)),$$
(3)
rge $R(q_1) = \begin{pmatrix} -l_1 \sin q_{11} - l_2 \sin(q_{11} + q_{12}) & -l_2 \sin(q_{11} + q_{12}) \\ l_1 \cos q_{11} + l_2 \cos(q_{11} + q_{12}) & l_2 \cos(q_{11} + q_{12}) \end{pmatrix}.$

Тогда можно сформировать ошибку слежения $e_1 = y_1 - g$ за эталонной траекторией, заданной в системе координат конечной точки. Найдем ее производную: $\dot{e}_1 = R(q_1)q_2 - \dot{g}$.

Для удобства дальнейшего синтеза управления в уравнении (3) переменную $y_2 = R(q_1)q_2$ можно трактовать как фиктивное управление и воспользоваться блочным подходом. Чтобы избежать перерегулирования, характерного для стандартных линейных локальных связей [6, 15], предлагается назначить стабилизирующую часть желаемого фиктивного управления в виде функции гладкого и ограниченного гиперболического тангенса [13]:

$$y_2^* = \dot{g} - M_1 \tanh(K_1 e_1),$$
 (4)

где $M_1 \tanh(K_1 e_1) = (m_{11} \tanh(k_{11} e_{11}), m_{12} \tanh(k_{12} e_{12}))^T$, $m_{1i} > 0$ – амплитуды управления, $k_{1i} > 0$ – большие коэффициенты в аргументе гиперболического тангенса $\tanh(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

Введем ошибку слежения $e_2 = y_2 - y_2^*$ переменной y_2 за желаемой функцией (4). Таким образом, замена переменных

$$e_1 = y_1 - g,$$

$$e_2 = y_2 - y_2^* = R(q_1)q_2 - \dot{g} + M_1 \tanh(K_1e_1),$$

приводит систему (3) к виду

$$\dot{e}_1 = e_2 - M_1 \tanh(K_1 e_1),$$

$$\dot{e}_2 = \dot{R}(q_1, q_2)q_2 - \ddot{g} + \Lambda_1 + R(q_1)H^{-1}(q_1)(u - C(q_1, q_2)q_2 - G(q_1)),$$
(5)

где

$$\dot{R}(q_1,q_2) = \begin{pmatrix} -l_1 \cos(q_{11})q_{21} - l_2 \cos(q_{11} + q_{12})(q_{21} + q_{22}) & -l_2 \cos(q_{11} + q_{12})(q_{21} + q_{22}) \\ -l_1 \sin(q_{11})q_{21} - l_2 \sin(q_{11} + q_{12})(q_{21} + q_{22}) & -l_2 \sin(q_{11} + q_{12})(q_{21} + q_{22}) \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_1 = (m_{11}k_{11}(1 - \tanh^2(k_{11}e_{11}))\dot{e}_{11}, m_{12}k_{12}(1 - \tanh^2(k_{12}e_{12}))\dot{e}_{12})^T.$$

На основе этой системы далее будут разработаны два закона управления с компенсацией составляющих модели в правой части второго уравнения (5) и без компенсации, т.е. с их подавлением. Эти законы отличаются объемом априорной информации, требующейся для их реализации, и обеспечивают разное качество регулирования. В следующих разделах будут формализованы постановки задач для этих двух случаев и предложены решения.

3. Синтез закона управления с компенсацией составляющих модели

Будем считать, что известны:

- аналитический вид всех составляющих объекта (1)-(2);
- значения всех параметров объекта (1)–(2);
- значения второй производной задающего воздействия *g*, которая является гладкой и ограниченной функцией.

В данных предположениях требуется синтезировать управление u, обеспечивающее асимптотическую устойчивость ошибки слежения $e_1 = y_1 - g$:

$$\lim_{t \to +\infty} e_1(t) = 0.$$

Для этого сформируем комбинированное управление, состоящее из части, которая компенсирует все слагаемые во втором уравнении (5) и стабилизирующей части в виде гиперболического тангенса:

$$u = C(q_1, q_2)q_2 + G(q_1) - (R(q_1)H^{-1}(q_1))^{-1}(M_2\tan(K_2e_2) + \dot{R}(q_1, q_2)q_2 - \ddot{g} + \Lambda_1),$$
(6)

где $M_2 \tanh(K_2 e_2) = (m_{21} \tanh(k_{21} e_{21}), m_{22} \tanh(k_{22} e_{22}))^T$, $m_{2i} > 0$, $k_{2i} > 0$.

Следовательно, приходим к замкнутой системе:

$$\dot{e}_1 = e_2 - M_1 \tanh(K_1 e_1),$$

 $\dot{e}_2 = -M_2 \tanh(K_2 e_2).$

Она является асимптотически устойчивой при любых $m_{1i} > 0$, $k_{1i} > 0$, $m_{2i} > 0$, $k_{2i} > 0$ [13]. Эти коэффициенты выбираются исходя из желаемых показателей качества регулирования.

4. Синтез закона управления с подавлением составляющих модели

- Введем следующие предположения:
- известны матрицы $R(q_1)$ (3), $H(q_1)$;
- обобщенные скорости принадлежат известной допустимой области:

$$q_{2i}(t) \le Q_{2i}, t \ge 0. \tag{7}$$

В данных предположения ставится задача синтеза управления *и*, гарантирующего стабилизацию ошибки слежения с заданной точностью:

$$\left|e_{1i}(t)\right| \le \Delta_{1i}, t \ge t_{1i},\tag{8}$$

где $t_{li} > 0$ – время регулирования. В данной работе не рассматривается задача обеспечения его заданного значения.

Сформируем закон управления без компенсации составляющих правой части второго уравнения (5):

$$u = -(R(q_1)H^{-1}(q_1))^{-1}(M_2 \tanh(K_2 e_2)).$$
(9)

Тогда приходим к следующей замкнутой системе:

$$\dot{e}_1 = e_2 - M_1 \tanh(K_1 e_1),$$

$$\dot{e}_2 = f - M_2 \tanh(K_2 e_2),$$
(10)

где $f = (f_1, f_2)^T = \dot{R}(q_1, q_2)q_2 - \ddot{g} + \Lambda_1 - R(q_1)H^{-1}(q_1)(C(q_1, q_2)q_2 + G(q_1)), |f_i(t)| \le F_i, t \ge 0$, константы $F_i, i = 1, 2$, известны из допустимых областей изменения переменных (7) системы (1)–(2).

Лемма [13]. Если в (10) вектор-функция f ограничена $|f_i(t)| \le F_i$, $t \ge 0$, то тогда для сколь угодно малого $\Delta_{1i} > 0$ и любого начального условия $e_{1i}(0)$ найдутся такие числа $\overline{k}_{ij} > 0$, $\overline{m}_{ij} > 0$, что при любых $k_{ij} > \overline{k}_{ij}$, $m_{ij} > \overline{m}_{ij}$ выполнится неравенство (8), i = 1, 2, j = 1, 2.

5. Результаты моделирования

Для проверки эффективности разработанных алгоритмов управления и сравнительного анализа результатов их работы было проведено численное моделирование в Simulink. Были приняты следующие значения параметров объекта [14]:

$$m_1 = 1$$
 [KF], $m_2 = 1$ [KF], $l_1 = 2$ [M], $l_2 = 1$ [M].

Ставилась задача отслеживания выходом y_1 следующей эталонной траектории $g = (g_1, g_2)^T$, заданной в системе координат конечной точки:

$$g_1 = l_1 \cos q_{11d} + l_2 \cos(q_{11d} + q_{12d}),$$

$$g_2 = l_1 \sin q_{11d} + l_2 \sin(q_{11d} + q_{12d}).$$

где $q_{11d} = 0,1\sin t + 0,3, q_{12d} = 0,1\cos t + 0,3$, из начальных условий:

$$q_{11}(0) = 0,1$$
 [paд], $q_{12}(0) = 0,5$ [paд],
 $q_{21}(0) = 0$ [pad/c], $q_{22}(0) = 0$ [pad/c].

Моделировались замкнутые системы (1)–(2), (6) и (1)–(2), (9). С помощью закона управления (9) без компенсации составляющих модели требовалось обеспечить, чтобы ошибка в установившимся режиме не превышала 0,05 м. Ограничение на обобщенные скорости (7):

$$|q_{2i}(t)| \le 1.5 \text{ [pag/c]}, t \ge 0, i = 1, 2.$$

Для объективности сравнения результатов коэффициенты регуляторов (6) и (9) выбирались так, чтобы время регулирования было примерно одинаковым. Исходя из данных условий для регулятора (6) с компенсацией составляющих были приняты значения:

$$m_{11} = 1, m_{12} = 1, k_{11} = 5, k_{12} = 5,$$

 $m_{21} = 10, m_{22} = 10, k_{21} = 1, k_{22} = 1$

Для регулятора (9) с подавлением составляющих были заданы следующие значения коэффициентов:

$$m_{11} = 0,53, m_{12} = 0,50, k_{11} = 13, k_{12} = 35,$$

 $m_{21} = 200, m_{22} = 200, k_{21} = 1, k_{22} = 1.$

Численное интегрирование замкнутых систем выполнялось с помощью неявного метода Эйлера с постоянным шагом 10⁻³ [с].

На рис. 1 представлены графики выхода $y_{1i}(t)$ и эталонной траектории $g_i(t)$, на рис. 2 – графики ошибок слежения $e_{1i}(t) = y_{1i}(t) - g_i(t)$. На рис. 3 приведены графики управлений u_i , i = 1, 2.

В табл. 1 и 2 представлены значения следующих показателей качества регулирования: времени регулирования t_{1i} [c]: $|e_{1i}(t)| \le 0,005$ [м], $t \ge t_{1i}$, ошибки в установившемся режиме $\Delta_{1i} = \max |e_{1i}(t)|$ [м], $t \ge 2$ [c], управления в переходном процессе $u_{\max,t,i} = \max |u_i(t)|$ [H·м], $t \ge 0$ [c] и в установившемся режиме $u_{\max,s,i} = \max |u_i(t)|$ [H·м], $t \ge 2$ [c].



Рис. 1. Графики выхода $y_{1i}(t)$ и эталонной траектории $g_i(t)$ (слева для i = 1, справа для i = 2)



Рис. 2. Графики ошибок слежения $e_{1i}(t) = y_{1i}(t) - g_i(t)$ (слева для i = 1, справа для i = 2)



Рис. 3. Графики управлений u_i (слева для i = 1, справа для i = 2)

Таблица 1. Значения показателей качества регулирования для звена 1

Закон	Показатель качества					
управления	Время	Ошибка	Управление	Управление		
	регулирования	Δ_{1i}	$u_{\max,t,i}$	$u_{\max,s,i}$		
	t_{1i}					
С	0,8160	$1.46 \ 10^{-5}$	740,6207	39,2535		
компенсацией		-,				
Без	0,7160	0,0047	234,3860	39,2470		
компенсации						

Закон	Показатель качества					
управления	Время	Ошибка	Управление	Управление		
	регулирования	Δ_{1i}	$u_{\max,t,i}$	$u_{\max,s,i}$		
	t_{1i}					
С	1,1840	$8.51 \ 10^{-5}$	261,6704	9,7802		
компенсацией						
Без	1,1890	0,0040	165,2713	9,8148		
компенсации						

Таблица 2. Значения показателей качества регулирования для звена 2

Из рис. 1 и 2 следует, что цели управления достигаются для обеих замкнутых систем и всех степеней свободы: для (1)–(2), (6) обеспечена асимптотическая сходимость ошибки слежения, для (1)–(2), (9) ошибка слежения по модулю не превысила допустимое значение 0,005 [м] в установившемся режиме. При этом компенсация составляющих модели (5) с помощью закона (6) привела к увеличению максимальных по модулю значений управлений примерно в 1,42–2,8 раз по сравнению с отсутствием компенсации при использовании закона (9) (см. табл. 1, 2, рис. 3). Таким образом, по сравнению с законом управления (6) с компенсацией составляющих модели, закон (9) без компенсации имеет более простой аналитический вид. Его реализация требует меньше информации о параметрах объекта (в частности, не требуется информация о второй производной задающего воздействия) и, как правило, затрачиваются меньшие амплитуды управляющих воздействий. Однако стабилизация ошибки слежения возможна только с заданной точностью (8).

6. Заключение

Цель работы состояла в синтезе системы слежения для двухзвенного робота-манипулятора, которая не требовала бы решения обратной задачи кинематики. Цель была достигнута с помощью приведения исходной системы к блочной форме относительно выходной переменной – вектора положений конечной точки манипулятора, определяемых в ее рабочей области. На основе данной блочной формы были предложены два закона управления с компенсацией составляющих модели и без компенсации. Проведен сравнительный анализ этих двух замкнутых систем. Результаты численного моделирования подтвердили эффективность подходов.

В будущем планируется разработать систему слежения для более полной и адекватной модели объекта с учетом действия параметрических и внешних возмущений, динамики исполнительных устройств. Для компенсации неопределенностей будет построен наблюдатель возмущений.

Литература

- 1. *Qin L.; Wei X.; Lv L.; Han L.; Fang G.* An Analytical Solution for Inverse Kinematics of SSRMS-Type Redundant Manipulators // Sensors. 2023. Vol. 23. P. 1–14.
- 2. *Mohamed K.T, Abdel-razak M.H, Haraz E.H, Ata A.A.* Fine tuning of a PID controller with inlet derivative filter using Pareto solution for gantry crane systems // Alex. Eng. J. 2021. Vol. 61, N 9. P. 6659–6673.
- 3. *Barreno, P., Parras, J., Zazo, S.,* An Efficient Underwater Navigation Method Using Mpc with Unknown Kinematics and Non-Linear Disturbances // Journal of Marine Science and Engineering. 2023. Vol. 11, N 4. P. 1–20.
- 4. *Mustafa, M.M.; Hamarash, I.; Crane, C.D.* Dedicated Nonlinear Control of Robot Manipulators in the Presence of External Vibration and Uncertain Payload // Robotics. 2020. Vol. 9, N 2. P. 1–16.
- Ling S., Wang H., Liu P.X. Adaptive fuzzy tracking control of flexible-joint robots based on command filtering // IEEE Trans. Ind. Electron. – 2019. – Vol. 67, N 5. – P. 4046–4055.
- 6. Kochetkov S.A., Krasnova S.A., Antipov A.S. Cascade Synthesis of Electromechanical Tracking Systems with Respect to Restrictions on State Variables // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50, N 1. P. 10142–10147.
- Leoro J., Hsiao T., Betancourt C. A new geometric subproblem to extend solvability of inverse kinematics based on screw theory for 6r robot manipulators // Int. J. Control Autom. Syst. – 2021. – Vol. 19. – P. 562–573.
- 8. *Li J., Yu H., Shen N., Zhong Z., Lu Y., Fan J.* A novel inverse kinematics method for 6-DOF robots with non-spherical wrist // Mech. Mach. Theory. 2020. Vol. 67, N 157. P. 104–189.
- Нелаева Е.И., Челноков Ю.Н. Решение прямых и обратных задач кинематики роботов-манипуляторов с использованием дуальных матриц и бикватернионов на примере стэнфордского манипулятора. Часть 2 // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2015. N 16. – С. 456–463.
- 10. *Lu J., Zou T., Jiang X.* A neural network based approach to inverse kinematics problem for general six-axis robots // Sensors. 2022. Vol. 22. P. 1–19.
- 11. *Kramar V.; Kramar O.; Kabanov A.* An Artificial Neural Network Approach for Solving Inverse Kinematics Problem for an Anthropomorphic Manipulator of Robot SAR-401 // Machines. 2022. Vol. 10. P. 2–24.
- 12. Оськин Д.А., Дыда А.А., Константинова Е.А. Нейросетевое моделирование задачи обратной кинематики для манипуляционного робота // Современные наукоемкие технологии. 2015. N 12-2. С. 254–257.
- 13. Антипов А.С., Краснова С.А., Уткин В.А. Синтез инвариантных нелинейных одноканальных систем слежения с сигмоидальными обратными связями с обеспечением заданной точности слежения // Автоматика и телемеханика. – 2022. N 1. – С. 40–66.
- 14. *Baccouch M., Dodds S.* A Two-Link Robot Manipulator: Simulation and Control Design // International Journal of Robotic Engineering. 2020. Vol. 5. P. 1–17.
- 15. Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В., Нгуен Т.Т. Прямой метод синтеза системы управления рабочим органом манипулятора при неполных измерениях // Проблемы управления. 2008. N 1. С. 10–18.