ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕСНЫМ РОБОТОМ

Воропаева Н.В.
Самарский национальный исследовательский институт имени академика С.П.Королева, Самара, Россия
voropaevan61@mail.ru

Аннотация. Рассматривается сингулярно возмущенная задача управления для мобильного колесного робота. Для понижения размерности и упрощения структуры модели используется метод асимптотической декомпозиции, что позволяет произвести расщепление исходной системы на независимую медленную подсистему и быструю подсистему, описывающую быстро затухающие переходные процессы.

Ключевые слова: колесные роботы, управление, сингулярно возмущенные системы, декомпозиция.

Введение

Хорошо известно, что мобильные роботы представляют собой сложные электромеханические системы, специфика которых состоит в наличии нескольких временных масштабов протекания процессов. Математическими моделями таких систем являются сингулярно возмущенные дифференциальные системы, содержащие малый параметр при части производных. Решение задач анализа и управления сингулярно возмущенными системами сопряжено с трудностями, вызванными высокой размерностью и вычислительной жесткостью, вызванной наличием разнотемповых переменных.

Удобным аппаратом исследования систем с несколькими временными масштабами является метод асимптотической декомпозиции [1 – 3]. Данный метод сочетает в себе геометрический подход и асимптотические приемы анализа. В основе метода лежит теория медленных и быстрых интегральных многообразий. Использование метода декомпозиции позволяет построить расщепляющее преобразование, позволяющее разделить медленные и быстрые переменные в рассматриваемой системе. При этом медленная подсистема является независимой и может быть использована в качестве упрощенной модели при построении управляющего воздействия. Быстрая подсистема описывает затухающие с высокими скоростями переходные процессы. Расщепляющая замена переменных эффективно строится в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра.

Метод асимптотической декомпозиции использовался для решения задач управления сложными разнотемповыми системами различной природы [4 – 14]. В настоящей работе указанный метод применяется для расщепления математической модели колесного робота.

1. Описание математической модели

Рассматривается задача управления для трехколесного мобильного робота с двумя ведущими колесами [15]. Динамика робота описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2^2 + y_1, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_2 + y_2, \\ \varepsilon \dot{y}_1 &= -x_1 - y_1 + u_1, \\ \varepsilon \dot{y}_2 &= -\nu x_2 - y_2 + u_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где безразмерные переменные $x_1,\ x_2$ характеризуют механические процессы (линейная скорость точки и угловая скорость платформы), y_1, y_2 характеризуют электрические процессы (токи во внешних цепях электродвигателей), безразмерный параметр ν отражает массо-габаритные характеристики робота. Предполагается малость постоянной времени $\varepsilon = L/R$ переходного процесса в цепях электродвигателя, характеризующей "время запаздывания" в цепях управления ведущими колесами. Здесь L – обобщенная индуктивность цепи электродвигателя, R –омическое сопротивление цепи ротора. Управляющими воздействиями являются $u_1 = U_1 + U_2$, и $u_2 = U_1 - U_2$, где U_1, U_2 – ЭДС электродвигателей. При моделировании пренебрегаем влиянием инерционности третьего рояльного колеса. Предполагается, что движение происходит без проскальзывания.

Система (1) является сингулярно возмущенной дифференциальной системой линейной по быстрым переменным, что упрощает задачу построения расщепляющего преобразования.

2. Интегральное многообразие медленных движений

Будем предполагать, что управляющие воздействия u_i , $i = 1, 2$ строятся в виде

$$u_i(t, x_1, x_2, \varepsilon) = u_i^{(0)}(t, x_1, x_2) + \varepsilon u_i^{(1)}(t, x_1, x_2) + \cdots$$

Можно доказать существование притягивающего интегрального многообразия системы (1), которое описывается уравнениями

$$y_i = h_i(t, x_1, x_2, \varepsilon),\ i = 1, 2. \tag{2}$$

Условия существования такого интегрального многообразия изучались в работах [1 – 3]. Функции h_i могут быть построены с любой степенью точности в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра ε

$$h_i(t, x_1, x_2, \varepsilon) = h_i^{(0)}(t, x_1, x_2) + \varepsilon h_i^{(1)}(t, x_1, x_2) + \cdots \tag{3}$$

из уравнений

$$\begin{gathered}
\varepsilon \frac{\partial h_1}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x_2^2 + h_1) + \varepsilon \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(-x_1 x_2 + h_2) = -x_1 - h_1 + u_1, \\
\varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(x_2^2 + h_1) + \varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(-x_1 x_2 + h_2) = -\nu x_2 - h_2 + u_2.
\end{gathered} \tag{4}$$

Подставляя (3) в (4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем

$$\begin{gathered}
h_1^{(0)}(t, x_1, x_2) = -x_1 + u_1^{(0)}, \\
h_2^{(0)}(t, x_1, x_2) = -\nu x_2 + u_2^{(0)}, \\
h_1^{(1)}(t, x_1, x_2) = x_2^2 - x_1 + u_1^{(0)} + u_1^{(1)} - \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial t}, \\
h_2^{(1)}(t, x_1, x_2) = -\nu\left(-x_1 x_2 - u_2^{(0)} + \nu x_2\right) + u_2^{(0)} - \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial t}.
\end{gathered} \tag{5}$$

Система, описывающая движение на интегральном многообразии медленных движений (2), имеет вид

$$\begin{aligned}
\dot v_1 &= v_2^2 + h_1(t, v_1, v_2, \varepsilon), \\
\dot v_2 &= -v_1 v_2 + h_2(t, v_1, v_2, \varepsilon).
\end{aligned}$$

3. Расщепляющее преобразование

В окрестности интегрального многообразия (2) введем новые переменные

$$w_i = x_i - v_i, \quad z_i = y_i - h_i(t, x_1, x_2, \varepsilon), \qquad i = 1, 2$$

и рассмотрим вспомогательную расширенную вспомогательную систему

$$\begin{aligned}
\dot v &= V(t, v, \varepsilon), \\
\dot w &= W(t, v, w, z, \varepsilon), \\
\varepsilon \dot z &= Z(t, v, w, z, \varepsilon),
\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},\ z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, V(t, v, \varepsilon) = \begin{pmatrix} v_2^2 + h_1(t, v_1, v_2, \varepsilon) \\ -v_1 v_2 + h_2(t, v_1, v_2, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

$$W_1(t, v, w, z, \varepsilon) = 2v_1 w_2 + w_2^2 + z_1 + h_1(t, v_1 + w_1, v_2 + w_2, \varepsilon) - h_1(t, v_1, v_2, \varepsilon),$$

$$W_2(t, v, w, z, \varepsilon) = -v_1 w_2 - v_2 w_1 - w_1 w_2 + z_2 + h_2(t, v_1 + w_1, v_2 + w_2, \varepsilon) - h_2(t, v_1, v_2, \varepsilon).$$

$$h(t,x,\varepsilon)=\begin{pmatrix}h_1(t,x_1,x_2,\varepsilon)\\ h_2(t,x_1,x_2,\varepsilon)\end{pmatrix}, Z(t,v,w,z,\varepsilon)=-\left(E+\varepsilon\frac{\partial h(t,v+w,\varepsilon)}{\partial x}\right)z,$$

E – единичная матрица.

Можно доказать существование интегрального многообразия быстрых движений системы (6) вида

$$w=\varepsilon H(t,v,z,\varepsilon). \tag{7}$$

Функция H может быть построена с любой степенью точности в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра

$$H=H(t,v,z,\varepsilon)=H^{(0)}(t,v,z)+\varepsilon H^{(1)}(t,v,z)+\cdots \tag{8}$$

из уравнения

$$\varepsilon\frac{\partial H}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial H}{\partial v}V(t,v,\varepsilon)+\frac{\partial H}{\partial z}Z(t,v,\varepsilon H,z,\varepsilon)=W(t,v,\varepsilon H,z,\varepsilon) \tag{9}$$

Подставляя асимптотическое разложение (8) в уравнение (9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем

$$\frac{\partial H^{(0)}}{\partial z}z=-z,\quad \frac{\partial H^{(1)}}{\partial z}z=-\widetilde{W}^{(1)}(t,v,z,H^{(0)}) \tag{10}$$

$$\widetilde{W}^{(1)}(t,v,z,H^{(0)})=W^{(1)}(t,v,z)-\frac{\partial H^{(0)}}{\partial v}V^{(0)}(t,v)-\frac{\partial H^{(0)}}{\partial z}Z^{(1)}(t,v,z),$$

$$\frac{\partial H^{(i)}}{\partial z}z=-\widetilde{W}^{(i)}(t,v,z,H^{(0)},H^{(1)},\dots,H^{(i-1)}),\ i>1.$$

где

$$W(t,v,\varepsilon H(t,v,z,\varepsilon),z,\varepsilon)=W^{(0)}(z)+\varepsilon W^{(1)}(t,v,z)+\cdots$$

$$Z(t,v,\varepsilon H(t,v,z,\varepsilon),z,\varepsilon)=Z^{(0)}(z)+\varepsilon Z^{(1)}(t,v,z)+\cdots$$

$W^{(0)}(z)=z,\qquad Z^{(0)}(z)=-z.$

Представим функции $H^{(i)}$, $\widetilde{W}^{(i)}$ в виде асимптотических разложений

$$H^{(i)}(t,v,z)=\sum_{j\ge 1}H^{(i,j)}(t,v,z),$$

$$\widetilde{W}^{(i)}(t,v,z,H^{(0)},H^{(1)},\dots,H^{(i-1)})=\sum_{j\ge 1}\widetilde{W}^{(i,j)}(t,v,z)$$

в достаточно малой окрестности начала координат. Здесь $H^{(i,j)}$, $\widetilde{W}^{(i,j)}$– векторные функции, компонентами которых являются формы порядка j относительно координат вектора z. Относительно $H^{(i,j)}$ из уравнений (10) получаем линейные алгебраические уравнения.

Ограничиваясь линейными членами, получаем $H^{(0,1)}$ =-z.

Система, описывающая движение на интегральном многообразии (7), принимает форму

$$\dot v=V(t,v,\varepsilon),$$

$$\varepsilon\dot z=Z(t,v,\varepsilon H(t,v,z,\varepsilon),z,\varepsilon) \tag{11}$$

Доказано, что замена переменных

$$x=v+\varepsilon H(t,v,z,\varepsilon),\ \ y=z+h(t,x,\varepsilon), \tag{12}$$

где $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$, преобразует исходную разнотемповую систему (1) к блочно-треугольной форме (11).

В исходных обозначениях преобразование координат (12) принимает вид

$$x_1=v_1-\varepsilon z_1+O(\varepsilon^2),\qquad x_2=v_2-\varepsilon z_2+O(\varepsilon^2),$$

$$y_1 = z_1 + h_1^{(0)}(t, x_1, x_2) + \varepsilon h_1^{(1)}(t, x_1, x_2) + O(\varepsilon^2),$$
$$y_2 = z_2 + h_2^{(0)}(t, x_1, x_2) + \varepsilon h_2^{(1)}(t, x_1, x_2) + O(\varepsilon^2),$$

где $h_i^{(j)}(t, x_1, x_2)$ имеют вид (5).

Результирующая блочно-треугольная система (11) принимает вид

$$\dot{v}_1 = v_2^2 + h_1(t, v_1, v_2, \varepsilon),$$
$$\dot{v}_2 = -v_1 v_2 + h_2(t, v_1, v_2, \varepsilon), \qquad (13)$$
$$\varepsilon \dot{z}_1 = -z_1 + \varepsilon \left(\frac{\partial h_1^{(0)}}{\partial v_1} z_1 + \frac{\partial h_1^{(0)}}{\partial v_2} z_2 \right) + O(\varepsilon^2),$$
$$\varepsilon \dot{z}_2 = -z_2 + \varepsilon \left(\frac{\partial h_2^{(0)}}{\partial v_1} z_1 + \frac{\partial h_2^{(0)}}{\partial v_2} z_2 \right) + O(\varepsilon^2), \qquad (14)$$

Главное условие существования притягивающего интегрального многообразия медленных движений (2) и расщепляющего преобразования (12) состоит в том, что норма фундаментальной матрицы быстрой подсистемы (14) экспоненциально стремится к нулю при $t \longrightarrow \infty$. Это свойство фундаментальной матрицы обеспечивается расположением собственных значений матрицы быстрой подсистемы в левой комплексной полуплоскости при *ε=0*.

Медленная подсистема (13), описывающая движение на интегральном многообразии $y = h(t, x, \varepsilon)$ является независимой. Размерность этой подсистемы в два раза меньше размерности исходной системы. Быстрая подсистема (14) демонстрирует быстро гаснущую динамику. Медленная подсистема не содержит быстрых переменных, но, тем не менее, адекватно описывает поведение полной динамической системы. Этот факт позволяет использовать медленную подсистему в качестве редуцированной модели колесного робота при конструировании закона управления.

4. Примеры

Рассмотрим частный случай, когда управляющие воздействия u_1, u_2 постоянны, например $u_1 = u,\ u_2 = 0$. В этом случае медленное многобразие (2) примет форму

$$y_1 = -x_1 + u + \varepsilon(x_2^2 - x_1 + u) + O(\varepsilon^2),$$
$$y_2 = -\nu x_2 - \varepsilon \nu (x_1 x_2 + \nu x_2) + O(\varepsilon^2).$$

Расщепляющее преобразование будет иметь вид

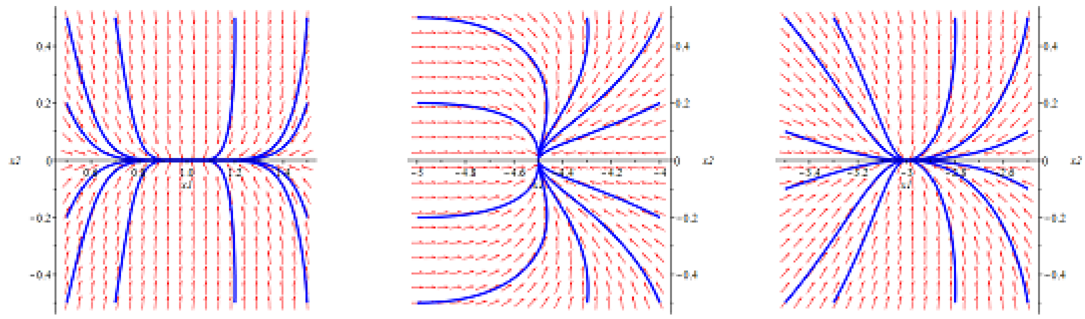
$$x_1 = v_1 - \varepsilon z_1 + O(\varepsilon^2), \qquad x_2 = v_2 - \varepsilon z_2 + O(\varepsilon^2),$$
$$y_1 = z_1 - x_1 + u + \varepsilon(x_2^2 - x_1 + u) + O(\varepsilon^2),$$
$$y_2 = z_2 - \nu x_2 - \varepsilon \nu (x_1 x_2 + \nu x_2) + O(\varepsilon^2).$$

Результирующая блочно-треугольная система (11) примет форму

$$\dot{v}_1 = (1 + \varepsilon)(v_2^2 - v_1 + u) + O(\varepsilon^2),$$
$$\dot{v}_2 = -v_2(1 + \varepsilon \nu)(v_1 + \nu) + O(\varepsilon^2),$$
$$\varepsilon \dot{z}_1 = -(1 - \varepsilon) z_1 + O(\varepsilon^2),$$
$$\varepsilon \dot{z}_2 = -(1 - \varepsilon) z_2 + O(\varepsilon^2),$$

Рисунки 1, 2 демонстрируют поведение медленной подсистемы при различных соотношениях параметров робота.

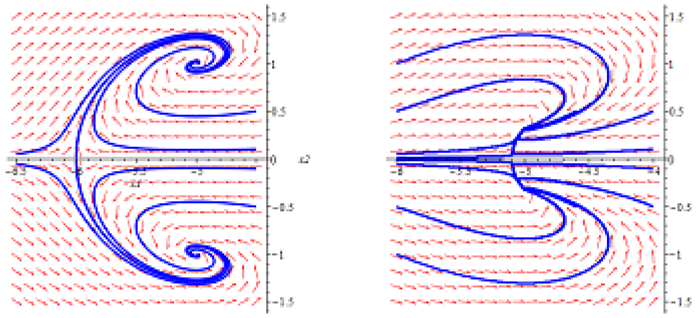
Если u+ν>*0*, то медленная подсистема имеет единственную неподвижную точку *(u, 0)* типа «устойчивый узел» (Рис. 1), что соответствует устойчивому поступательному движению робота.



а) *б)* *в)*

Рис. 1. Фазовые портреты на плоскости медленных переменных v_1, v_2 для ε=0.1, ν=5 и характерных значений управляющего параметра: u=1 (а), u=-4.5 (б), u=-3 (в)

Если u+ν<*0*, то медленная подсистема имеет неустойчивую особую точку *(u, 0)* типа «седло» и две устойчивых неподвижных точки $(-\nu, \sqrt{-u-v})$, $(-\nu, -\sqrt{-u-v})$ типа «фокус» или «узел» (Рис. 2), соответствующие комбинации поступательного и вращательного движений робота.



а) *б)*

Рис. 2. Фазовые портреты на плоскости медленных переменных v_1, v_2 для ε=0.1, ν=5 и характерных значений управляющего параметра: u=-6 (а), u=-5.1 (б)

На Рис. 3 изображен характерный вид динамики быстрых переменных.

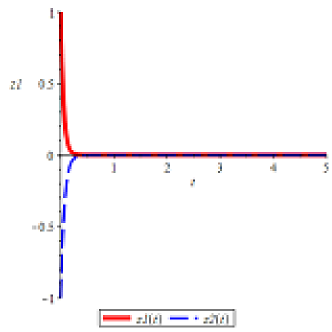


Рис. 3. Быстрые переменные $z_1(t), z_2(t)$ (ε=0.1, ν=5, u=-5.1)

Предложенный подход может быть использован также при решении задачи отслеживания заданного программного движения $x_1 = v_1^*(t)$, $x_2 = v_2^*(t)$.

Для простоты ограничимся членами нулевого порядка малости в правой части системы (13).

$$\dot{v}_1 = v_2^2 - v_1 + u_1^{(0)},$$

$$\dot{v}_2 = -v_2(v_1 + \nu) + u_2^{(0)}. \qquad (15)$$

Введем новый закон управления $\gamma_1 = v_2^2 - v_1 + u_1^{(0)}, \gamma_2 = -v_2(v_1 + \nu) + u_2^{(0)}$. Тогда уравнения (15) примут вид

$$\dot{v}_1 = \gamma_1, \quad \dot{v}_2 = \gamma_2 \qquad (16)$$

Можно выбрать управляющее воздействие, обеспечивающее существование и асимптотическую устойчивость решения $v_1 = v_1^*(t)$, $v_2 = v_2^*(t)$ системы (16), например

$$\gamma_1 = \dot{v}_1^*(t) - a_1\big(v_1 - v_1^*(t)\big), \qquad \gamma_2 = \dot{v}_{21}^*(t) - a_2\big(v_2 - v_2^*(t)\big), a_1 > 0, a_2 > 0.$$

На Рис. 4 показано поведение медленных переменных для случая программного движения

$$v_1^*(t) = \sin t, \quad v_2^*(t) = 0$$

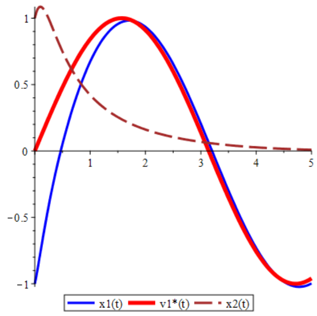


Рис. 4. Медленные переменные $x_1(t)$, $v_1^*(t), x_2(t)$
(ε=0.1, ν=5)

5. Заключение

Применение метода асимптотической декомпозиции позволило расщепить исходную систему на независимую медленную подсистему и быструю подсистему, описывающую затухающие переходные процессы. Этот подход позволяет упростить задачи анализа и управления для многомерных разнотемповых систем.

Литература

1. *Sobolev V.A.* Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems // Syst. & Control Lett. 1984. – Vol. 5. – P. 169 – 279.
2. *Воропаева Н.В., Соболев В.А.* Конструктивный метод расщепления сингулярно возмущенных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. 1995. Т.31. 4. – С. 569–578.
3. *Воропаева Н.В*. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем / Н.В. Воропаева, В.А. Соболев. –М.: Физматлит, 2009. – 256 с.
4. *Sobolev V.A.* Singular perturbations in linearly quadratic optimal control problems // Autom. Remote Control. 1991. – Vol. 52:1. – P. 180–189.
5. *Fridman E.* Exact slow-fast decomposition of a class of nonlinear singularly perturbed optimal control problems via invariant manifolds // Int. J. Control. 1999. – Vol. 72 (17). – P. 1609–1618.
6. *Fridman E.* Exact slow-fast decomposition of nonlinear singularly perturbed optimal control problem // Syst. Control Lett. 2000. – Vol. 40 (2). – P. 121–132.
7. *Ghorbel F.*, *Spong M.W.* Integral manifold of singularly perturbed systems with application to rigid-link flexible-joint multibody system // International Journal of Non-linear Mechanics. 2000. – Vol. 35. – P. 133–155.
8. *Воропаева Н.В., Соболев В.А.* Декомпозиция линейно-квадратичной задачи оптимального управления с быстрыми и медленными переменными // Автоматика и телемеханика. 2006. N 8. – С. 3–11.
9. *Vidilina O.V.*, *Voropaeva N.V.* The construction of the observers for dynamic systems with fast and slow variables // CEUR Workshop Proceedings. 2016. – Vol. 1638. – P. 750–758.
10. *Voropaeva N.V.* Decomposition of flexible joint robot mathematical model // Procedia Engineering. 2017. – Vol. 201. – P. 517–523.
11. *Voropaeva N.*, *Sobolev V.* PD-Regulators Design Problem for Robotic Type Systems with Singular Perturbations // Proceedings of ITNT 2020 - 6th IEEE International Conference on Information Technology and Nanotechnology. – Samara, 2020.
12. *Vidilina O.V.*, *Voropaeva N.V.* The optimal control problem for magnetoelectric actuator // Journal of Physics: Conf. Series. 2018. – 1096. – 0112062.
13. *Vidilina O.V.*, *Voropaeva N.V.* Reduction of the optimal control problem for a magnetoelectric power drive // Journal of Physics: Conf. Series. 2019. – 1368. – 042009.
14. *Воропаева Н.В., Лянкин С.Е.* Декомпозиция математической модели колесного робота //XVII Королёвские чтения: Материалы Всероссийской молодёжной научной конференции с международным участием, посвящённой 35-летию со дня первого полёта МТКС "Энергия -Буран". – Самара, 2023. – С. 355.
15. *Martynenko Yu. G.* Motion control of mobile wheeled robots // J. Math. Sci. 2007. – Vol. 147. N 2. – P. 6569–6606.