ВЫЧИСЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ОЦЕНКИ ХЬЮБЕРА В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ

Горяинов В.Б., Масягин М.М.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
vb-goryainov@bmstu.ru, masyagin@bmstu.ru

Аннотация. Данная работа посвящена вычислению асимптотической ковариационной матрицы оценки Хьюбера в модели Озаки. Функция Хьюбера представляет из себя обобщение квадратичной функции и функции модуля числа, тем самым методы оптимизации, использующие её как функцию потерь, оказываются более гибкими и устойчивыми к выбросам.

Ключевые слова: экспоненциальная авторегрессионная модель, функция Хьюбера, асимптотическая ковариационная матрица, разложение в ряд Тейлора.

Введение

Современные методы анализа временных рядов включают в себя множество различных задач и математических моделей для их решения. Так, говоря о задаче авторегрессии, нельзя не вспомнить о модели Озаки, также известной как экспоненциальная авторегрессионная модель. Предложенная Т. Озаки в 1981 году [1], она и по сей день активно применяется для моделирования различных физических, экономических и биологических процессов [2,3]. Помимо этого, сейчас она де-факто является стандартом для генерации тренировочных наборов данных для целого ряда архитектур нейронных сетей [4].

Несмотря на более чем сорокалетнюю историю использования, ряд теоретических свойств модели всё ещё не исследован. Например, не представлено выражение её асимптотической ковариационной матрицы для функции Хьюбера – наиболее популярной функции из широкого класса функций М-оценок. Возможность вычисления данной матрицы может быть крайне полезна при решении задачи оценивания предельных дисперсий коэффициентов модели, что в свою очередь упрощает как выбор конкретной функции потерь в модели, так и выбор самой модели.

Целью данной работы является нахождение асимптотической ковариационной матрицы для функции потерь Хьюбера в модели Озаки.

1. Постановка задачи

Обобщённая экспоненциальная авторегрессионная модель, также известная как модель Озаки, определяется уравнением:

$$X_t = \sum\nolimits_{i=0}^{p-1} \left(a_i + b_i e^{-cX_{t-1}^2}\right) X_{t-(i+1)} + \xi_t, \tag{1}$$

где $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_{p-2}, b_{p-2}, a_{p-1}, b_{p-1}, c$ – её действительные параметры; $\xi_t, t = 0, 1, \dots$ – последовательность независимых случайных величин, каждая из которых удовлетворяет приведённым ниже условиям:

- $E\xi_t = 0$ – то есть каждая случайная величина в последовательности имеет нулевое математическое ожидание;
- $D\xi_t = E\xi_t^2 = \sigma^2 < +\infty$ – то есть каждая случайная величина в последовательности имеет конечную дисперсию.

Для краткости введём обозначения $a = (a_0, a_1, \dots, a_{p-1})$ и $b = (b_0, b_1, \dots, b_{p-1})$.

Допустим, процесс X_t удовлетворяет уравнению (1), и имеются n его наблюдений $X_0, \dots, X_{n-1}$. Рассмотрим задачу оценивания параметров модели (a, b, c) по этим наблюдениям с использованием функции потерь Хьюбера, то есть задачу минимизации следующей функции нескольких переменных:

$$g(a, b, c) = \sum_{t=p}^{n} \rho_\delta \left(X_t - \sum_{i=0}^{p-1} \left(a_i + b_i e^{-cX_{t-1}^2}\right) X_{t-(i+1)} \right),$$

где ρ_δ – это функция потерь Хьюбера, задаваемая соотношением (2):

$$\rho_\delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, \text{если } |x| < \delta \\ \delta\left(|x| - \frac{1}{2}\delta\right), \text{ иначе} \end{cases}. \quad (2)$$

Найдём асимптотическую ковариационную матрицу оценки Хьюбера в модели Озаки, то есть ковариационную матрицу функции потерь Хьюбера в рассматриваемой модели при $n \to \infty$.

2. План вычисления асимптотической ковариационной матрицы

Для удобства введём обозначение:

$$x_t(a,b,c) = \xi_t = X_t - \sum_{i=0}^{p-1}\left(a_i + b_i e^{-cX_{t-1}^2}\right)X_{t-(i+1)},$$

тогда:

$$g(a,b,c) = \sum_{t=p}^{n}\rho_\delta(\xi_t) = \sum_{t=p}^{n}\rho_\delta(x_t(a,b,c)).$$

Для вычисление асимптотической ковариационной матрицы воспользуемся следующим планом:

- Разложим функцию $g(a,b,c)$ по формуле Тейлора в окрестности некоторой фиксированной точки $(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c})$ до второго порядка. Отбросим бесконечно малый член разложения и используем полученное выражение для аппроксимации $g(a,b,c)$.
- Предположим, что модель Озаки с функцией потерь Хьюбера является стационарной и эргодической. Это допущение является корректным и не сильно ограничивает практическое применение модели, так как в инженерных задачах как правило рассматриваются именно стационарные и эргодичные процессы или процессы, приводимые к ним (квазистационарные процессы). С учётом наложенных ограничений выразим предельные значения вектора и матрицы коэффициентов разложения по формуле Тейлора из предыдущего пункта при $n \to \infty$.
- Найдём асимптотическое распределение точки минимума квадратичной формы, входящей в разложение по формуле Тейлора из первого пункта, и покажем, что оно совпадает с асимптотическим распределением точки $(\hat{a},\hat{b},\hat{c})$ минимума исходной функции $g(a,b,c)$. Тем самым получим выражение асимптотической ковариационной матрицы оценки Хьюбера в модели Озаки в общем виде.
- Явно вычислим первые и вторые производные функции $g(a,b,c)$ по всем её переменным (парам её переменных), а также их предельные значения при $n \to \infty$. Подставим их в выражение, полученное в предыдущем пункте, и получим итоговую формулу асимптотической ковариационной матрицы функции потерь Хьюбера в модели Озаки.

3. Вычисление асимптотической ковариационной матрицы

3.1. Аппроксимация разложением по формуле Тейлора

Фиксируем произвольную точку $(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c})$, а затем разложим функцию $g(a,b,c)$ в её окрестности, воспользовавшись формулой Тейлора второго порядка:

$$g(a,b,c) = g\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right) + A^T\theta + \frac{1}{2}\theta^T B\theta + \varphi(a,b,c),$$

где A – блочный вектор-столбец первых производных функции $g(a,b,c)$ в точке $(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c})$ размером $((2p+1)\times 1)$, состоящий из двух подвекторов размером $(p \times 1)$ и одного числа;
B – блочная матрица Гессе функции $g(a,b,c)$ в точке $(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c})$ размером $((2p+1)\times(2p+1))$, состоящая из 4 подматриц размером $(p \times p)$, двух подвекторов размера $(p \times 1)$, двух подвекторов размера $(1 \times p)$ и одного числа;
$\theta = \sqrt{n}\left(a-\tilde{a},\ b-\tilde{b}, c-\tilde{c}\ \right)$ – блочный вектор-столбец размером того же размера и структуры, что и вектор-столбец A;
$\varphi(a,b,c)$ – бесконечно малая величина при $(a,b,c) \to (\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c})$.

Ниже приведены выражения (3) и (4), задающие блочное представление вектора-столбца A и матрицы Гессе B соответственно:

$$A = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} \frac{\partial g(a,b,c)}{\partial a} \\ \frac{\partial g(a,b,c)}{\partial b} \\ \frac{\partial g(a,b,c)}{\partial c} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

$$B = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial a \partial c} \\ \frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial b \partial a} & \frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial b \partial c} \\ \frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial c \partial a} & \frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial c \partial b} & \frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial c^2} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Очевидно, что порядок малости функции $\varphi(a,b,c)$ выше порядка малости функции $\tau(a,b,c) = (a-\tilde{a})^T(a-\tilde{a}) + \left(b-\tilde{b}\right)^T\left(b-\tilde{b}\right) + (c-\tilde{c})^2$. Таким образом, её вкладом в разложение по формуле Тейлора в дальнейшем можно пренебречь.

3.2. Наложение ограничений стационарности и эргодичности

Предположим, что исследуемая модель (1) является эргодической и стационарной. Тогда в соответствии с [5], на её коэффициенты накладываются следующие два ограничения:

- $c > 0$, так как в противном случае множитель $\mathrm{e}^{-cX_{t-1}^2}$ будет бесконечно большим;
- $|a_i| < 1, |b_i| < 1, i = 0, 1, \dots, p-1$.

Следствием стационарности и эргодичности модели является существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} B$. В данный момент обозначим его как $\left(E\rho_\delta''\left(x_t(a,b,c)\right)\right)K$, где K – это некоторая матрица коэффициентов размера $((2p+1)\times(2p+1))$, а $E\rho_\delta''\left(x_t(a,b,c)\right)$ – это математическое ожидание случайной величины – второй производной функции $\rho_\delta(x_t(a,b,c))$, причём:

- $E\rho_\delta'\left(x_t(a,b,c)\right) = 0$;
- $E\rho_\delta''\left(x_t(a,b,c)\right) < +\infty$.

Прямые вычисления первых и вторых производных функции $g(a,b,c)$ впоследствии покажут корректность выбранного представления $\lim\limits_{n\to\infty} B$.

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} B = \left(E\rho_\delta''\left(x_t(a,b,c)\right)\right)K$, а значит:

$$g(a,b,c) = g\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\right) + A^T\theta + \frac{1}{2}\theta^T\left(E\rho_\delta''\left(x_t(a,b,c)\right)\right)K\theta + \varphi(a,b,c).$$

3.3. Поиск асимптотического распределения точки минимума целевой функции

Покажем, что асимптотическое распределение точки $(\hat{a},\hat{b},\hat{c})$ минимума функции $g(a,b,c)$ совпадает с асимптотическим распределением точки минимума квадратичной формы (5).

$$A^T\theta + \tfrac{1}{2}\theta^T\left(E\rho_\delta''\left(x_t(a,b,c)\right)\right)K\theta. \quad (5)$$

Для этого проведём рассуждения, аналогичные рассуждениям в работе [6] и получим, что асимптотическое распределение точки $(\hat{a},\hat{b},\hat{c})$ минимума функции $g(a,b,c)$ совпадает с асимптотическим распределением точки минимума (5), а он в свою очередь равен $\tilde{\theta} = -\frac{1}{E\rho_\delta''(x_t(a,b,c))}K^{-1}A$.

Для того, чтобы найти асимптотическое распределение случайного вектора $-\frac{1}{E\rho_\delta''(x_t(a,b,c))}K^{-1}A$ сначала покажем, что его составляющая – вектор A асимптотически нормален.

Рассмотрим μ_t – σ-алгебру событий, порождённую множеством случайных величин $X_s, s \le t$. В ней X_{t-1} измерима относительно μ_{t-1}. С учётом того, что ξ_t не зависит от μ_t имеем: $E[\xi_t X_{t-1}|\mu_{t-1}] = X_{t-1}E[\xi_t|\mu_{t-1}] = X_{t-1}E\xi_t = 0$.

Помимо этого, за счёт того, что $D\xi_t = E\xi_t^2 = \sigma^2 < +\infty$, получаем $EX_{t-1}^2 < +\infty$, а значит по центральной предельной теореме для мартингалов [7] последовательности

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial g(a,b,c)}{\partial a_i}, \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial g(a,b,c)}{\partial b_i}, \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial g(a,b,c)}{\partial c}$$

являются асимптотически нормальными.

Так как случайные величины X_{t-1} и ξ_t независимы и $E\rho'_\delta\big(x_t(a,b,c)\big) = 0$, то:

$$E\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial g(a,b,c)}{\partial a_i} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=p}^{n} E\big[\rho'_\delta\big(x_t(a,b,c)\big)X_{t-(i+1)}\big] = 0.$$

По аналогии $E\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial g(a,b,c)}{\partial b_i} = 0$, $E\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial g(a,b,c)}{\partial c} = 0$.

По аналогии найдём пределы математических ожиданий попарных произведений элементов вектора-столбца A.

С учётом того, что $E\rho''_\delta\big(x_t(a,b,c)\big) < +\infty$ и $E\left[\Big(\rho'_\delta\big(x_t(a,b,c)\big)\Big)^2\right] \neq 0$, несложно найти и дисперсии элементов вектора-столбца А, а затем прийти к выводу, что все они конечны. Таким образом, для всех случаев имеем нулевое математическое ожидание и конечные дисперсии.

После вычисления дисперсий и математических ожиданий можно сделан вывод, что случайный вектор A асимптотически нормален и имеет нулевое математическое ожидание и ковариационную матрицу K. Тогда согласно [8] асимптотическая ковариационная матрица вектора $-\frac{1}{E\rho''_\delta(x_t(a,b,c))}K^{-1}A$ равна $\frac{E\left[\left(\rho'_\delta(x_t(a,b,c))\right)^2\right]}{\left[E\rho''_\delta(x_t(a,b,c))\right]^2}K^{-1}$. С учётом того, что асимптотическое распределение $-\frac{1}{E\rho''_\delta(x_t(a,b,c))}K^{-1}A$ совпадает с асимптотическим распределением точки минимума функции $g(a,b,c)$, получим, что асимптотическая ковариационная матрица функции потерь Хьюбера в экспоненциальной авторегрессионной модели имеет вид:

$$\frac{E\left[\left(\rho'_\delta(x_t(a,b,c))\right)^2\right]}{\left[E\rho''_\delta(x_t(a,b,c))\right]^2}K^{-1}. \tag{6}$$

3.4. Вычисление первых и вторых производных

Для начала вычислим первую и вторую производные функции Хьюбера:

$$\rho'_\delta(x) = \begin{cases} \dfrac{\partial\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{\partial x}, \text{если } |x| < \delta \\ \dfrac{\partial\left(\delta\left(|x| - \frac{1}{2}\delta\right)\right)}{\partial x}, \quad \text{иначе} \end{cases} = \begin{cases} x, \text{если } |x| < \delta \\ \delta\, sign(x), \quad \text{иначе} \end{cases},$$

$$\rho''_\delta(x) = \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial x}, \text{если } |x| < \delta \\ \dfrac{\partial \delta\, sign(x)}{\partial x}, \quad \text{иначе} \end{cases} = \begin{cases} 1, \text{если } |x| < \delta \\ 0, \quad \text{иначе} \end{cases}.$$

Далее вычислим все первые производные функции $x_t(a,b,c)$:

$$\frac{\partial x_t(a,b,c)}{\partial a_i} = -X_{t-(i+1)}, \frac{\partial x_t(a,b,c)}{\partial b_i} = -X_{t-(i+1)}e^{-cX_{t-1}^2}, \frac{\partial x_t(a,b,c)}{\partial c} = \sum_{i=0}^{p-1} b_i X_{t-(i+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2}.$$

А затем и вторые производные $x_t(a,b,c)$:

$$\frac{\partial^2 x_t(a,b,c)}{\partial a_i \partial a_j} = 0, \frac{\partial^2 x_t(a,b,c)}{\partial a_i \partial b_j} = 0, \frac{\partial^2 x_t(a,b,c)}{\partial a_i \partial c} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 x_t(a,b,c)}{\partial b_i \partial a_j} = 0, \frac{\partial^2 x_t(a,b,c)}{\partial b_i \partial b_j} = 0, \frac{\partial^2 x_t(a,b,c)}{\partial b_i \partial c} = X_{t-(i+1)}X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2};$$

$$\frac{\partial^2 x_t(a,b,c)}{\partial c \partial a_j} = 0, \frac{\partial^2 x_t(a,b,c)}{\partial c \partial b_j} = X_{t-(i+1)}X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2}, \frac{\partial^2 x_t(a,b,c)}{\partial c^2} = -\sum_{i=0}^{p-1} b_i X_{t-(i+1)} X_{t-1}^4\, e^{-cX_{t-1}^2}$$

Обозначим по очереди a_i, b_i, c за p_i и воспользуемся правилом вычисления сложной производной:

$$\frac{\partial g(a,b,c)}{\partial p_i} = \sum_{t=p}^{n} \frac{\partial \rho_\delta(x_t(a,b,c))}{\partial x_t(a,b,c)} \frac{\partial x_t(a,b,c)}{\partial p_i} = \sum_{t=p}^{n} \rho'_\delta\big(x_t(a,b,c)\big) \frac{\partial x_t(a,b,c)}{\partial p_i}.$$

$$\frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial \left(\sum_{t=p}^{n} \rho'_\delta\big(x_t(a,b,c)\big) \frac{\partial x_t(a,b,c)}{\partial p_i}\right)}{\partial p_j} =$$

$$= \sum_{t=p}^{n} \left(\rho''_\delta\big(x_t(a,b,c)\big) \frac{\partial x_t(a,b,c)}{\partial p_i} \frac{\partial x_t(a,b,c)}{\partial p_j} + \rho'_\delta\big(x_t(a,b,c)\big) \frac{\partial^2 x_t(a,b,c)}{\partial p_i \partial p_j}\right).$$

Наконец, непосредственно вычислим первые и вторые производные первоначальной функции $g(a,b,c)$:

$$\frac{\partial g(a,b,c)}{\partial a_i} = -\sum_{t=p}^{n} \rho'_\delta\big(x_t(a,b,c)\big) X_{t-(i+1)},$$

$$\frac{\partial g(a,b,c)}{\partial b_i} = -\sum_{t=p}^{n} \rho'_\delta\big(x_t(a,b,c)\big) X_{t-(i+1)} e^{-cX_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial g(a,b,c)}{\partial c} = -\sum_{t=p}^{n} \rho'_\delta\big(x_t(a,b,c)\big) X_{t-(i+1)} e^{-cX_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial a_i \partial a_j} = \sum_{t=p}^{n} \rho''_\delta\big(x_t(a,b,c)\big) X_{t-(i+1)} X_{t-(j+1)},$$

$$\frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial a_i \partial b_j} = \frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial b_i \partial a_j} = \sum_{t=p}^{n} \rho''_\delta\big(x_t(a,b,c)\big) X_{t-(i+1)} X_{t-(j+1)} e^{-cX_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial a_i \partial c} = \frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial c \partial a_j} = \sum_{t=p}^{n} \rho''_\delta\big(x_t(a,b,c)\big) X_{t-(i+1)} \sum_{i=0}^{p-1} b_i X_{t-(i+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial^2 x_t(a,b,c)}{\partial b_i \partial b_j} = \sum_{t=p}^{n} \rho''_\delta\big(x_t(a,b,c)\big) X_{t-(i+1)} X_{t-(j+1)} e^{-2cX_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial b_i \partial c} = \frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial c \partial b_j} = \sum_{t=p}^{n} \rho'_\delta\big(x_t(a,b,c)\big) X_{t-(i+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2} -$$

$$-\sum_{t=p}^{n} \rho''_\delta\big(x_t(a,b,c)\big) X_{t-(i+1)} e^{-cX_{t-1}^2} \sum_{j=0}^{p-1} b_j X_{t-(j+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial c^2} = \sum_{t=p}^{n} \rho''_\delta\big(x_t(a,b,c)\big) \left(\sum_{i=0}^{p-1} b_i X_{t-(i+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2}\right)^2 -$$

$$-\sum_{t=p}^{n} \rho'_\delta\big(x_t(a,b,c)\big) \sum_{i=0}^{p-1} b_i X_{t-(i+1)} X_{t-1}^4\, e^{-cX_{t-1}^2}.$$

Далее вычислим предельные значения полученных выражений первых и вторых производных. Для этого предварительно покажем, что $E\rho'_\delta\big(x_t(a,b,c)\big) = 0$.

Воспользуемся тем, что математическое ожидание нечётной функции от случайной величины с чётной ФПВ (функцией плотности вероятности) на симметричном относительно нуля отрезке равно нулю.

Очевидно, что $\rho'_\delta\big(x_t(a,b,c)\big)$ – это нечётная функция, а $x_t(a,b,c) = \xi_t$ – случайная величина с чётной и симметричной относительно нуля ФПВ для крайне широкого класса распределений, начиная нормальным и загрязнённым нормальным распределением (распределением Тьюки) и заканчивая распределениями Стьюдента и Лапласа.

Помимо этого, сошлёмся на работу [9], согласно которой произведение двух стационарных и эргодических связанных последовательностей является стационарной и эргодической последовательностью. Также в вычислениях внесём множитель $\frac{1}{n}$ в пределы для того, чтобы можно было воспользоваться свойствами центральной предельной теоремы.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial a_i \partial a_j} = E\big[\rho''_\delta\big(x_t(a,b,c)\big)\big]E\big[X_0 X_{i-j}\big],$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial a_i \partial b_j} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial b_i \partial a_j} = E\big[\rho''_\delta\big(x_t(a,b,c)\big)\big]E\left[X_0 X_{i-j} e^{-cX_i^2}\right],$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial a_i \partial c} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial c \partial a_j} = -E\big[\rho''_\delta\big(x_t(a,b,c)\big)\big]\sum_{j=0}^{p-1} b_j E\left[X_j^2 X_0^2 e^{-cX_j^2}\right],$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial b_i \partial b_j} = E\big[\rho''_\delta\big(x_t(a,b,c)\big)\big]E\left[X_0 X_{i-j} e^{-2cX_i^2}\right],$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial b_i \partial c} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial c \partial b_j} = -E\big[\rho''_\delta\big(x_t(a,b,c)\big)\big]\sum_{j=0}^{p-1} b_j E\left[X_j^2 X_0^2 e^{-2cX_j^2}\right],$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial^2 g(a,b,c)}{\partial c^2} = E\big[\rho''_\delta\big(x_t(a,b,c)\big)\big]\sum_{t=p}^{n}\left(\sum_{j=0}^{p-1} b_j^2\right) E X_j^4 X_0^2 e^{-2cX_j^2}.$$

Следовательно, действительно:

$$\lim_{n\to\infty} B = \Big(E\rho''_\delta\big(x_t(a,b,c)\big)\Big)K,$$

где K – это соответствующая матрице B блочная матрица.

Таким образом, действительно, асимптотическая ковариационная матрица оценки Хьюбера в модели Озаки выражается по формуле (6).

4. Практическое применение

В теоретических расчётах и тестовых примерах исследователь зачастую знает истинные значения параметров модели (a,b,c), в связи с чем приближение асимптотической ковариационной матрицы модели рассчитывается тривиально:

- выбирается такая величина n, что с одной стороны, полученные при генерации $X_0, \dots, X_{n-1}$ способны достаточно подробно описать модель, а с другой – сама генерация не занимает слишком много времени;
- происходит непосредственная генерация $X_0, \dots, X_{n-1}$;
- на базе $X_0, \dots, X_{n-1}$ и заранее известных (a,b,c) рассчитывается ковариационная матрица модели по формуле (6) – корректное приближение асимптотической ковариационной матрицы при грамотно подобранном параметре n. Её диагональные элементы – искомые предельные дисперсии оценок коэффициентов (a,b,c) при оценке Хьюбера.

Стоит отметить, что при использовании формулы (6) вместо предельных значений вторых производных используются формулы их прямого вычисления.

При неизвестных значениях параметров (a,b,c) придётся опираться лишь на предоставляемые исследователю результаты наблюдений $X_0, \dots, X_{n-1}$ и находить оценки параметров (a,b,c) неким оптимизационным методом. После этого приближение асимптотической ковариационной матрицы будет вычисляться на базе исходных наблюдений $X_0, \ldots, X_{n-1}$ и приближений истинных значений параметров (a, b, c), что безусловно приведёт к потере точности. К сожалению, на практике данный подход безальтернативен.

5. Заключение

В ходе выполнения работы была получена формула (6) вычисления асимптотической ковариационной матрицы оценки Хьюбера в модели Озаки (1). Также в работе описано практическое применение формулы (6) при приближённом вычислении асимптотической ковариационной матрицы по имеющимся наблюдениям.

В дальнейших исследованиях возможно обобщить результаты, полученные для оценки Хьюбера, на широкий класс М-оценок, таких как функция Коши, функция Уэлша, функция Тьюки, функция Джемана-МакКлюра и другие.

Литература

1. *Ozaki T.* Nonlinear time series models and dynamical systems. // Handbook of Statistics. – 1985. – Vol. 5. – P. 25-83.
2. *Patrick D.J., Harvill J.L., Hansen C.W.* A semiparametric spatio-temporal model for solar irradiance data. // Renewable Energy. – 2016. – Vol. 87., N. 1. – P. 15-30.
3. *Kulik R., Bilayi-Biakana Cl., Soulier Ph.* Statistical inference for heavy tailed series with extremal independence. // Extremes. – 2020. – Vol. 23, N. 1 – P. 1-33.
4. *Parker P.A., Holan S.H., Ravishanker N.* Nonlinear time series classification using bispectrum-based deep convolutional neural networks. // Applied Stochastic Models in Business and Industry. – 2020. – Vol. 36, N. 2 – P. 1-30.
5. *Cao J., Yin W., Zheng G.* Further results on stabilization of stochastic differential equations with delayed feedback control under G-expectation framework // Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 2021. – Vol. 27, N. 2.
6. *Huber P., Ronchetti E.M.* Robust Statistics – 2 ed. – Willey, 2019. – P. 372.
7. *Billingsley P.* Convergence of Probability Measures. – 2 ed. – Willey, 1999. – P. 304.
8. *Magnus J.R., Neudecker H.* Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics. – 2 ed. – Willey, 2008. – P. 471.
9. *White H.* Asymptotic Theory for Econometricians. – 1 ed. – Academic Press, 2001. – P. 228.