

ПАДЕ РЕГУЛЯТОР КАК ПРИБЛИЖЕННАЯ ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ В ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ДИСКРЕТНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СВЯЗАННОЙ СИСТЕМЕ

Даник Ю.Э., Дмитриев М.Г.

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,
Москва, Россия

yuliadanik@gmail.com, mdmitriev@mail.ru

Аннотация. Для двухпараметрической дискретной связанной управляемой системы предлагается приближенный способ построения аналитического семейства законов обратной связи, использующий асимптотические приближения, Паде аппроксимации и технику подхода SDRE. Приводятся соответствующие численные эксперименты.

Ключевые слова: параметрически связанные системы, асимптотические приближения, Паде аппроксимации, законы обратной связи.

Введение

Теория управления интенсивно развивается во многих направлениях, в частности связанных с разработкой законов и соответствующих алгоритмов управления в виде обратной связи для автономных нелинейных систем управления, где существенное значение имеют как скорость вычислений, так и требуемый объем оперативной памяти бортовых ЭВМ.

В связи с этим, большую поддержку для достижения таких целей могут оказывать алгоритмы, объединяющие технику SDRE ([1-3] и др.) и подход к построению обратной связи в нелинейной задаче управления, которая формально приводится к линейно квадратичной задаче оптимального управления, где матрицы зависят от координат вектора состояния) и технику Паде аппроксимаций ([4], [5] и др.). Последняя использует информацию о точных решениях, которая содержится в соответствующих асимптотических приближениях по тем или иным параметрам управляемой системы.

В работах [6-11] по возмущенным непрерывным и дискретным нелинейным управляемым системам демонстрировалось, что техника разложений по малому параметру в окрестности концов параметрического интервала, использование символьных параметрических конструкций и Паде аппроксимаций позволяет строить регуляторы зачастую обладающих стабилизационными свойствами и близкие к точным решениям при всех значениях параметра. В работе [11] такие же характеристики получены и в случае двух параметров.

Здесь по той же схеме исследуется возможность построения регулятора Паде в дискретной нелинейной управляемой системе большой размерности с двумя параметрами, которая может встречаться в так называемых связанных системах (см., например, [12]).

1. Постановка задачи

Рассматривается следующая формально линейная по состоянию и управлению, но с коэффициентами по состоянию и управлению, дискретная нелинейная система на полуоси, полученная из нелинейной системы вида

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A(x, \varepsilon, \mu)x + B(x, \varepsilon, \mu)u, \quad x(0) = x_0, \\ I(u) &= \sum_{t=0}^{\infty} x^T Q(x, \varepsilon, \mu)x + u^T R_0 u \rightarrow \inf_u, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in X$, $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $x_2 \in \mathbb{R}^m$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r$, $u_1 \in \mathbb{R}^{r_1}$, $u_2 \in \mathbb{R}^{r_2}$, $r_1 + r_2 = r$, $t = 0, 1, 2, \dots$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \ll 1$,

$0 < \mu \leq \mu_0 \ll 1$ – параметры, связывающие подсистемы

$A(x, \varepsilon, \mu) = \begin{bmatrix} A_1(x_1) & \mu A_2(x_2) \\ \varepsilon A_3(x_1) & A_4(x_2) \end{bmatrix}$, $B(x, \varepsilon, \mu) = \begin{bmatrix} B_1(x_1) & \mu B_2(x_2) \\ \varepsilon B_3(x_1) & B_4(x_2) \end{bmatrix}$, а матрицы критерия имеют следующий вид

$$R_0 = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} > 0, \quad Q(x, \varepsilon, \mu) = \begin{bmatrix} Q_1(x_1, \varepsilon, \mu) & Q_2(x_1, x_2, \varepsilon, \mu) \\ Q_2^T(x_1, x_2, \varepsilon, \mu) & Q_3(x_2, \varepsilon, \mu) \end{bmatrix} \geq 0.$$

Управление в задаче (1) будем искать в виде обратной связи по состоянию в соответствии с подходом SDRE, как в [3]

$$u(x, \varepsilon, \mu) = -\left[R + B(x, \varepsilon, \mu)^T P(x, \varepsilon, \mu) B(x, \varepsilon, \mu) \right]^{-1} B(x, \varepsilon, \mu)^T P(x, \varepsilon, \mu) A(x, \varepsilon, \mu) x, \quad (2)$$

где матрица коэффициентов усиления $P(x, \varepsilon, \mu)$ находится из дискретного матричного уравнения Риккати

$$A^T(x, \varepsilon, \mu) P A(x, \varepsilon, \mu) - P - A^T(x, \varepsilon, \mu) P B(x, \varepsilon, \mu) \tilde{R}(x, \varepsilon, \mu)^{-1} B^T(x, \varepsilon, \mu) P A(x, \varepsilon, \mu) + Q(x, \varepsilon, \mu) = 0, \quad (3)$$

а имеет вид $\tilde{R}(x, \varepsilon, \mu) = (R_0 + B^T(x, \varepsilon, \mu) P B(x, \varepsilon, \mu))$.

Здесь рассмотрим два подхода к нахождению приближенного решения уравнения (3) и соответствующего управления (2).

В соответствии с первым подходом решение (3) ищется в виде

$$\tilde{P}_2(x, \varepsilon) = \begin{bmatrix} P_1(x_1, x_2, \varepsilon, \mu) & \mu P_2(x_1, x_2, \varepsilon, \mu) \\ \mu P_2^T(x_1, x_2, \varepsilon, \mu) & P_3(x_1, x_2, \varepsilon, \mu) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

или $\tilde{P}_2(x, \varepsilon) = \begin{bmatrix} P_1(x_1, x_2, \varepsilon, \mu) & \varepsilon P_2(x_1, x_2, \varepsilon, \mu) \\ \varepsilon P_2^T(x_1, x_2, \varepsilon, \mu) & P_3(x_1, x_2, \varepsilon, \mu) \end{bmatrix}$, где элементы матрицы представляются в виде рядов по

степеням двух параметров $P_1(x, \varepsilon, \mu) = P_0^1(x_1) + \varepsilon P_{10}^1(x_1) + \mu P_{01}^1(x_1) + \varepsilon^2 P_{20}^1(x_1) + \varepsilon \mu P_{11}^1(x_1) + \mu^2 P_{02}^1(x_1) + \dots$

$$P_2(x, \varepsilon, \mu) = P_0^2(x_1, x_2) + \varepsilon P_{10}^2(x, x_2) + \mu P_{01}^2(x, x_2) + \varepsilon^2 P_{20}^2(x, x_2) + \varepsilon \mu P_{11}^2(x, x_2) + \mu^2 P_{02}^2(x, x_2) + \dots,$$

$$P_3(x, \varepsilon, \mu) = P_0^3(x_2) + \varepsilon P_{10}^3(x_2) + \mu P_{01}^3(x_2) + \varepsilon^2 P_{20}^3(x_2) + \varepsilon \mu P_{11}^3(x_2) + \mu^2 P_{02}^3(x_2) + \dots$$

Аналогично, подбираются представления и для матриц критерия

$$Q_2(x, \varepsilon, \mu) = Q_0^2(x_1, x_2) + \varepsilon Q_{10}^2(x, x_2) + \mu Q_{01}^2(x, x_2) + \varepsilon^2 Q_{20}^2(x, x_2) + \varepsilon \mu Q_{11}^2(x, x_2) + \mu^2 Q_{02}^2(x, x_2),$$

$$Q_3(x, \varepsilon, \mu) = Q_0^3(x_1, x_2) + \varepsilon Q_{10}^3(x, x_2) + \mu Q_{01}^3(x, x_2) + \varepsilon^2 Q_{20}^3(x, x_2) + \varepsilon \mu Q_{11}^3(x, x_2) + \mu^2 Q_{02}^3(x, x_2),$$

$$Q_1(x, \varepsilon, \mu) = Q_0^1(x_1, x_2) + \varepsilon Q_{10}^1(x, x_2) + \mu Q_{01}^1(x, x_2) + \varepsilon^2 Q_{20}^1(x, x_2) + \varepsilon \mu Q_{11}^1(x, x_2) + \mu^2 Q_{02}^1(x, x_2),$$

где $Q_i(x, \varepsilon, \mu)$, $i = 1, 2, 3$ представляют собой разложения по степеням двух параметров ε, μ .

Такие представления позволяют представить разложение для P в следующем виде

$$P(x, \varepsilon, \mu) = \begin{pmatrix} P_0^1 & 0 \\ 0 & P_0^3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} P_{01}^1 & P_0^2 \\ (P_0^2)^T & P_{01}^3 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} P_{10}^1 & 0 \\ 0 & P_{10}^3 \end{pmatrix} + \varepsilon \mu \begin{pmatrix} P_{11}^1 & P_{10}^2 \\ (P_{10}^2)^T & P_{11}^3 \end{pmatrix} + \\ + \mu^2 \begin{pmatrix} P_{02}^1 & P_{01}^2 \\ (P_{01}^2)^T & P_{02}^3 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} P_{20}^1 & 0 \\ 0 & P_{20}^3 \end{pmatrix} + \dots$$

и в нулевом приближении получаем $P = \begin{pmatrix} P_0^1(x_1) & 0 \\ 0 & P_0^3(x_2) \end{pmatrix}$, где

$$Q_1 - P_0^1 + A_1^T P_0^1 A_1 - A_1^T P_0^1 B_1 (R_0 + B_1^T P_0^1 B_1)^{-1} B_1^T P_0^1 A_1 = 0,$$

$$Q_3 - P_0^3 + A_4^T P_0^3 A_4 - A_4^T P_0^3 B_4 (R_0 + B_4^T P_0^3 B_4)^{-1} B_4^T P_0^3 A_4 = 0.$$

В качестве альтернативного способа получения решения (3), для сокращения выкладок, можно сразу использовать разложение

$$P(x, \varepsilon, \mu) = P_0(x) + \mu P_{01}(x) + \varepsilon P_{10}(x) + \mu \varepsilon P_{11}(x) + \mu^2 P_{02}(x) + \varepsilon^2 P_{20}(x) + \dots, \quad (5)$$

где $P(x, \varepsilon, \mu) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, а для матриц системы $A(x, \varepsilon, \mu)$, $B(x, \varepsilon, \mu)$ и критерия применять представления

$$\begin{aligned}
A(x, \varepsilon, \mu) &= \begin{bmatrix} A_1(x_1) & \mu A_2(x_2) \\ \varepsilon A_3(x_1) & A_4(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(x_1) & 0 \\ 0 & A_4(x_2) \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & A_2(x_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_3(x_1) & 0 \end{bmatrix} = A_0 + \mu A_{01}(x) + \varepsilon A_{10}(x) + \dots, \\
B(x, \varepsilon, \mu) &= \begin{bmatrix} B_1(x_1) & \mu B_2(x_2) \\ \varepsilon B_3(x_1) & B_4(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1(x_1) & 0 \\ 0 & B_4(x_2) \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & B_2(x_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_3(x_1) & 0 \end{bmatrix} = B_0 + \mu B_{01}(x) + \varepsilon B_{10}(x) + \dots, \quad (6) \\
Q(x, \varepsilon, \mu) &= \begin{bmatrix} Q_1(x_1, \varepsilon, \mu) & Q_2(x_1, x_2, \varepsilon, \mu) \\ Q_2^T(x_1, x_2, \varepsilon, \mu) & Q_3(x_2, \varepsilon, \mu) \end{bmatrix} = Q_0 + \mu Q_{01}(x) + \varepsilon Q_{10}(x) + \mu \varepsilon Q_{11}(x) + \mu^2 Q_{02}(x) + \varepsilon^2 Q_{20}(x) + \dots
\end{aligned}$$

Тогда, подставляя (5) в (1), получим для членов представления (5) следующие уравнения $P_0, P_{01}, P_{10}, P_{11}, P_{20}, P_{02}$ с учетом (6).

Для P_0 это матричное дискретное уравнение Риккати

$$0: Q_0 - P_0 + A_0^T P_0 A_0 - A_0^T P_0 B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_0^T P_0 A_0 = 0,$$

а для остальных 5 членов разложения – линейные разностные уравнения Ляпунова

$$\begin{aligned}
\mu: & Q_{01} - P_{01} + (A_0^T - A_0^T P_0 B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_0^T) P_{01} (A_0 - B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_0^T P_0 A_0) + \\
& + A_0^T P_0 A_{01} + A_{01}^T P_0 A_0 - A_0^T P_0 B_{01} (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_{01}^T P_0 A_0 - \\
& A_0^T P_0 B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_{01}^T P_0 A_0 - A_0^T P_0 B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_0^T P_0 A_{01} - \\
& A_{01}^T P_0 B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_0^T P_0 A_0 + \\
& A_0^T P_0 B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_{01}^T P_0 B_{01} (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_0^T P_0 A_0 + \\
& A_0^T P_0 B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_{01}^T P_0 B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_0^T P_0 A_0 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon: & Q_{10} - P_{10} + A_0^T P_{10} A_0 + A_0^T P_0 A_{10} + A_{10}^T P_0 A_0 - \\
& A_0^T P_0 B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_{10}^T P_{10} A_0 - \\
& A_0^T P_{10} B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_0^T P_0 A_0 - \\
& A_0^T P_0 B_{10} (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_0^T P_0 A_0 - \\
& A_0^T P_0 B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_{10}^T P_0 A_0 - \\
& A_0^T P_0 B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_0^T P_0 A_{10} - \\
& A_{10}^T P_0 B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_0^T P_0 A_0 + \\
& A_0^T P_0 B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_{10}^T P_{10} B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_0^T P_0 A_0 + \\
& A_0^T P_0 B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_{10}^T P_0 B_{10} (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_0^T P_0 A_0 + \\
& A_0^T P_0 B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_{10}^T P_0 B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_0^T P_0 A_0 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon \mu: & Q_{11} - P_{11} + A_0^T P_{11} A_0 - A_0^T P_0 B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_{11}^T P_{11} A_0 - \\
& A_0^T P_{11} B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_{11}^T P_0 A_0 + \\
& A_0^T P_0 B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_{11}^T P_{11} B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_0^T P_0 A_0 + C_{11} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2: & Q_{20} - P_{20} + A_0^T P_{20} A_0 - A_0^T P_0 B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_{20}^T P_{20} A_0 - \\
& A_0^T P_{20} B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_{20}^T P_0 A_0 + \\
& A_0^T P_0 B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_{20}^T P_{20} B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_0^T P_0 A_0 + C_{20} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu^2 : & Q_{02} - P_{02} + A_0^T P_{02} A_0 - A_0^T P_0 B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_0^T P_{02} A_0 - \\ & A_0^T P_{02} B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_0^T P_0 A_0 + \\ & A_0^T P_0 B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_0^T P_{02} B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_0^T P_0 A_0 + C_{02} = 0, \end{aligned}$$

где $C_{11}(x), C_{20}(x), C_{02}(x)$ – зависят от предыдущих членов разложения.

2. Построение аппроксимации Паде

На основе получаемого асимптотического разложения (5) в окрестности малых значений параметров ε, μ строится аппроксимация Паде по двум параметрам, как в [11]. Аппроксимации Паде обладают экстраполяционными и интерполяционными свойствами и как было показано в работах [6]-[11] расширяют область действия асимптотических разложений и позволяют получать семейства решений для задач управления по методу SDRE для более широких диапазонов изменения параметра/параметров, чем регулярное асимптотическое разложение.

Паде аппроксимация является одноточечной, когда используется только одно асимптотическое разложение при ее построении. Разложение приравнивается к представлению Паде, которое в матричном виде представляет собой произведение двух матриц, одна из которых обратная. В скалярном случае – Паде аппроксимация (ПА) является отношением двух полиномов (полиномов числителя и знаменателя). В частности, здесь предлагается рассмотреть Паде [2/2] в виде

$$\begin{aligned} PA_{[2/2]}(x, \varepsilon, \mu) = & (M_0 + \varepsilon M_{10}(x) + \mu M_{01}(x) + \varepsilon^2 M_{20}(x) + \varepsilon \mu M_{11}(x) + \mu^2 M_{02}(x)) \times \\ & (E + \varepsilon N_{10}(x) + \mu N_{01}(x) + \varepsilon^2 N_{20}(x) + \varepsilon \mu N_{11}(x) + \mu^2 N_{02}(x))^{-1}, \end{aligned} \quad (7)$$

где E – единичная матрица, а матрицы M, N – квадратные непрерывно дифференцируемые матрицы размерности $n \times n$.

Неизвестные коэффициенты представления ПА находятся из системы уравнений $PA_{[2/2]}(x, \varepsilon, \mu) = P(x, \varepsilon, \mu)$, получающейся путем приравнивания (7) и полученного асимптотического приближения (5) и отдельным рассмотрением слагаемых при одинаковых степенях параметров ε, μ .

Система уравнений для членов (7) принимает вид

$$\begin{aligned} 0: & M_0 = P_0 \\ \varepsilon: & M_{10} = P_{10} + P_0 N_{10} \\ \mu: & M_{01} = P_{01} + P_0 N_{01} \\ \varepsilon\mu: & M_{11} = P_{11} + P_{10} N_{01} + P_{01} N_{10} + P_0 N_{11} \\ \varepsilon^2: & M_{20} = P_{20} + P_{10} N_{10} + P_0 N_{20} \\ \mu^2: & M_{02} = P_{02} + P_{01} N_{01} + P_0 N_{02} \\ \varepsilon\mu^2: & P_{12} = P_{11} N_{01} + P_{10} N_{02} + P_{02} N_{10} + P_{01} N_{11} \\ \varepsilon^2\mu: & P_{21} = P_{20} N_{01} + P_{11} N_{10} + P_{10} N_{11} + P_{01} N_{20} \\ \varepsilon^3: & P_{30} = P_{20} N_{10} + P_{10} N_{20} \\ \mu^3: & P_{03} = P_{02} N_{01} + P_{01} N_{02} \\ \varepsilon^2\mu^2: & P_{22} = P_{20} N_{02} + P_{11} N_{11} + P_{02} N_{20}. \end{aligned}$$

Для упрощения воспользуемся здесь представлением ПА более низкого порядка, например,

$$\begin{aligned} PA_{[1/1]}(x, \varepsilon, \mu) = & (M_0 + \varepsilon M_{10}(x) + \mu M_{01}(x) + \varepsilon \mu M_{11}(x)) \times \\ & \times (E + \varepsilon N_{10}(x) + \mu N_{01}(x) + \varepsilon \mu N_{11}(x))^{-1}, \end{aligned} \quad (8)$$

тогда уравнения примут вид

$$\begin{aligned}
0: & \quad M_0 = P_0 \\
\varepsilon: & \quad M_{10} = P_{10} + P_0 N_{10} \\
\mu: & \quad M_{01} = P_{01} + P_0 N_{01} \\
\varepsilon\mu: & \quad M_{11} = P_{11} + P_{10} N_{01} + P_{01} N_{10} + P_0 N_{11} \\
\varepsilon^2: & \quad 0 = P_{20} + P_{10} N_{10} \\
\mu^2: & \quad 0 = P_{02} + P_{01} N_{01} \\
\varepsilon^2\mu: & \quad 0 = P_{20} N_{01} + P_{11} N_{10} + P_{10} N_{11}.
\end{aligned}$$

То есть, управление для (1) принимает с учетом построенной $ПА$ вид

$$\begin{aligned}
u_{Pade}(x, \varepsilon, \mu) = & - \left[R + B(x, \varepsilon, \mu)^T P A_{[1/1]}(x, \varepsilon, \mu) B(x, \varepsilon, \mu) \right]^{-1} \times \\
& \times B(x, \varepsilon, \mu)^T P A_{[1/1]}(x, \varepsilon, \mu) A(x, \varepsilon, \mu) x.
\end{aligned}$$

В случае громоздкости систем для коэффициентов матричной Паде аппроксимации по схеме из [9] можно использовать упрощенное представление последней системы, используя, например, вместо P_{11}, P_{02}, P_{20} или членов высших приближений диагональные матрицы с неизвестными положительными коэффициентами, поиск которых сводится к минимизации соответствующего функционала невязки. Отметим также, что без нахождения матричного коэффициента P_{11} в этом примере точность приближения с помощью $ПА$ резко падает, что дополнительно подчеркивает необходимость его нахождения.

3. Численный эксперимент

Рассмотрим следующий пример связанной системы (1) с двумя параметрами, где

$$\begin{aligned}
A_1(x_1) &= \begin{bmatrix} 1.1 & 0.5 + 0.1 \cos(x_{11}) \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}, A_2(x_2) = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0.3 + 0.1 \cos(x_{21}) & 1 \end{bmatrix}, \\
A_3(x_1) &= \begin{bmatrix} 1.01 & 0 \\ 0.2 + 0.05 \sin(x_{12}) & 1 \end{bmatrix}, A_4(x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.3 + 0.2 \cos(x_{22}) & 1.2 \end{bmatrix}, \\
B_1(x_1) &= [0.5 \quad 0.4 + 0.01x_{12}]^T, B_2(x_2) = [0.6 + 0.01x_{21} \quad 0.7]^T, \\
B_3(x_1) &= [0.5 \quad 0.2 + 0.01x_{11}]^T, B_4(x_2) = [0.6 \quad 0.3 + 0.01x_{22}]^T, \\
Q_{10} &= \begin{bmatrix} 1400 & 10 \\ 10 & 1800 \end{bmatrix}, Q_{20} = \begin{bmatrix} 100 & 10 \\ 10 & 100 \end{bmatrix}, Q_{30} = \begin{bmatrix} 1600 & 10 \\ 10 & 1800 \end{bmatrix}, \\
Q_{10}^1(x_1) &= Q_{20}^1(x_1) = \begin{bmatrix} 1200 + 0.01x_{11}^2 & 0 \\ 0 & 1200 + 0.01x_{12}^2 \end{bmatrix}, \\
Q_{01}^1(x_1) &= Q_{02}^1(x_1) = \begin{bmatrix} 450 + 0.01x_{11}^2 & 0 \\ 0 & 750 + 0.01x_{12}^2 \end{bmatrix}, \\
Q_{10}^3(x_2) &= Q_{20}^3(x_2) = \begin{bmatrix} 1200 + 0.01x_{21}^2 & 0 \\ 0 & 1200 + 0.01x_{22}^2 \end{bmatrix}, \\
Q_{01}^3(x_2) &= Q_{02}^3(x_2) = \begin{bmatrix} 450 + 0.01x_{21}^2 & 0 \\ 0 & 750 + 0.01x_{22}^2 \end{bmatrix}, \\
Q_{11}^1(x_1) &= Q_{11}^3(x_2) = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}, Q_{10}^2(x) = Q_{01}^2(x) = Q_{11}^2(x) = \\
Q_{20}^2(x_1) &= Q_{02}^2(x_2) = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}, R_1 = 1, R_2 = 1, x_0 = [5 \quad 2 \quad 5 \quad 2]^T.
\end{aligned}$$

Сравнение регуляторов по значению критерия качества приводится в Таблице 1. Траектории замкнутой системы при $\varepsilon = 0.04$, $\mu = 0.1$ представлены на Рис. 1-2.

Таблица 1. Сравнение регуляторов по значению критерия при разных значениях параметров

ε	μ	D-SDRE	Асимптотика второго порядка	Паде [1/1]
0.04	0.1	63138.1	63145.4	63141.1
0.1	0.04	63979.2	63991.1	63984.7
0.2	0.1	70976.3	71030.4	70999.8
0.1	0.9	115106.8	201519.4	122791.9

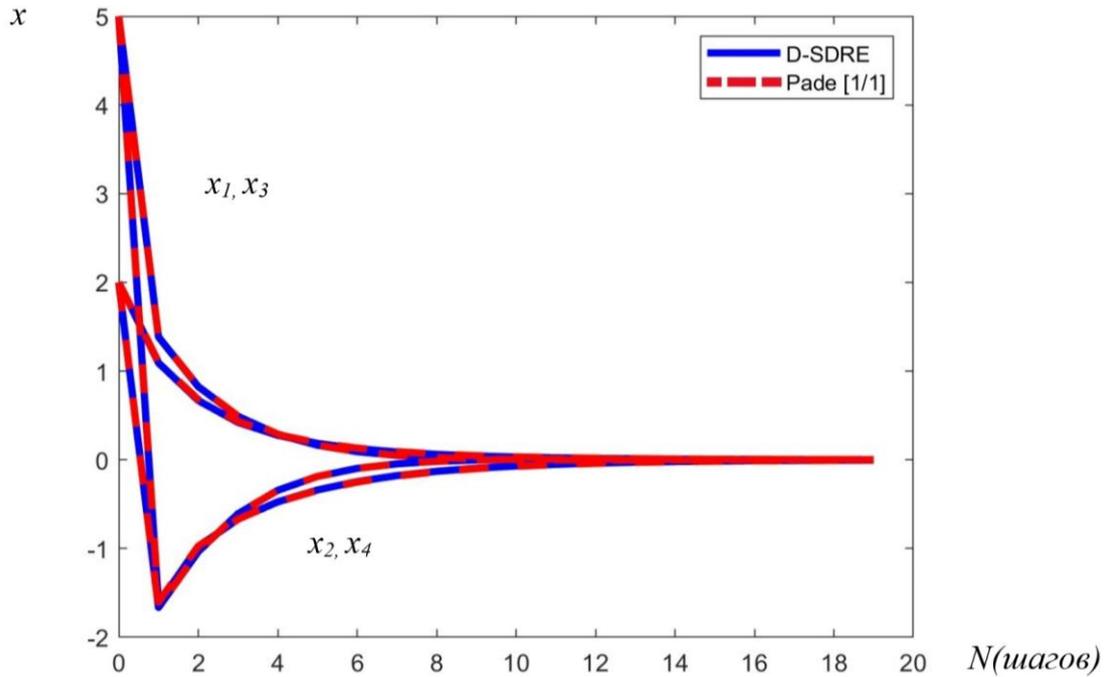


Рис. 1. Траектории замкнутой системы (красный пунктир – Паде [1/1], синяя кривая – D-SDRE), $\varepsilon = 0.04, \mu = 0.1$

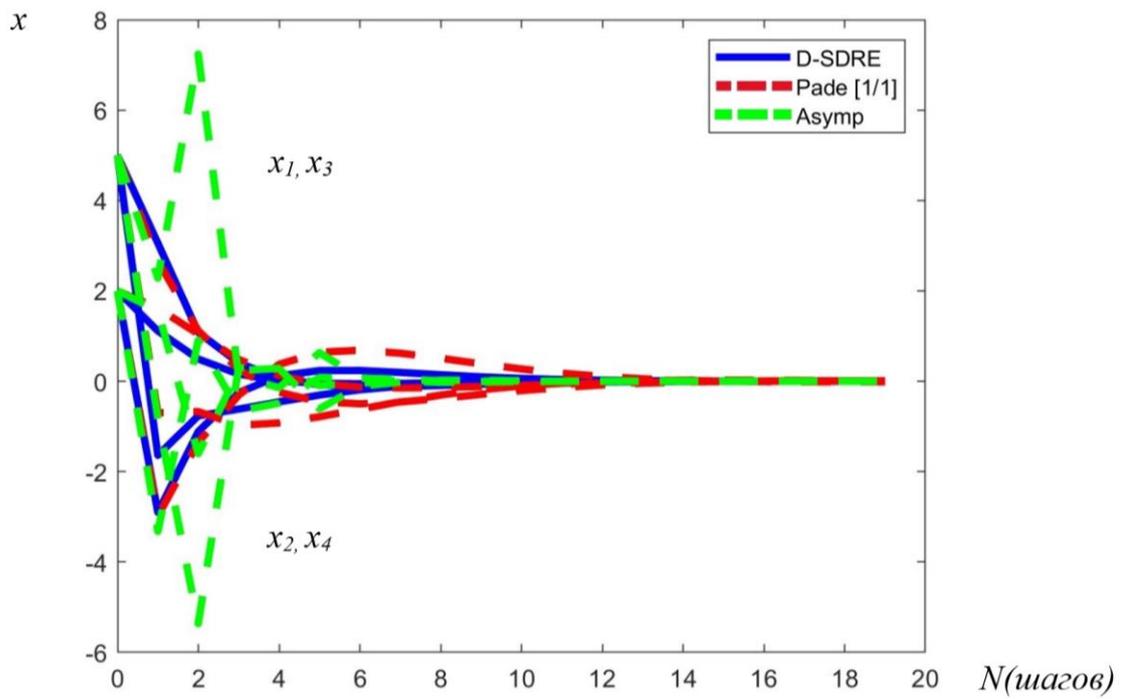


Рис. 2. Траектории замкнутой системы (красный пунктир – Паде [1/1], синяя кривая – D-SDRE, зеленая – асимптотика второго порядка (5)), $\varepsilon = 0.1, \mu = 0.9$

4. Заключение

Использование Паде аппроксимаций на основе соответствующих асимптотических приближений по параметрам позволяет строить символьные семейства стабилизирующих регуляторов, которые достаточно хорошо аппроксимируют точные регуляторы. При этом, Паде аппроксимации расширяют действие асимптотических разложений на более широкие интервалы изменения параметров. Рассмотрение системы с двумя параметрами расширяет область практического применения получающихся приближенных регуляторов.

Литература

1. *Çimen T.* State-dependent Riccati equation (SDRE) control: a survey // IFAC Proceedings Volumes. – 2008. – Vol. 41, N 2. – С. 3761-3775.
2. *Dutka A.S., Ordys A.W., Grimble M.J.* Optimized discrete-time state dependent Riccati equation regulator // Proceedings of the American Control Conference. IEEE. – 2005. – P. 2293–298.
3. *Афанасьев В. Н.* Управление нелинейными объектами с параметрами, зависящими от состояния // Автоматика и телемеханика. 2011. N 4. – С. 43-56.
4. *Андрианов И., Авреїцевич Я.* Методы асимптотического анализа и синтеза в нелинейной динамике и механике деформируемого твердого тела. Ижевск: ИКИ, 2013.
5. *Baker G., Graves-Morris P. R.* Pade approximations. Addison-Wesley Publishing, 1981.
6. *Даник Ю.Э.* Численно-аналитические алгоритмы построения стабилизирующих регуляторов для слабонелинейных непрерывных и дискретных систем управления: дис. ... канд. физ.-мат. наук.: 05.13.01: защищена 28.10.2019. — М., 2019. — 138 с.
7. *Danik Yu. E., Dmitriev M. G.* Stabilizing regulator for nonlinear discrete weakly coupled systems based on the Pade approximation // Proceedings of 2019 12th International Conference "Management of Large-Scale System Development", MLSD 2019. – Moscow, 2019. – P. 1–5.
8. *Даник Ю.Э.* Построение параметрического семейства регуляторов для одного класса слабосвязанных нелинейных систем // Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения XXX» (3-9 мая 2019). – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2019. – С. 114-117.
9. *Danik Yu. E., Dmitriev M. G.* The construction of stabilizing regulators sets for nonlinear control systems with the help of Pade approximations // Nonlinear Dynamics of Discrete and Continuous Systems. Springer International. – 2021. – P. 45–62.
10. *Danik Yu. E., Dmitriev M. G.* Symbolic Regulator Sets for a Weakly Nonlinear Discrete Control System with a Small Step // Mathematics. – 2022. – Vol. 10. – P. 1-14.
11. *Danik Y., Dmitriev M.* The Algorithm for the Construction of a Symbolic Family of Regulators for Nonlinear Discrete Control Systems with Two Small Parameters // International Conference on Mathematical Optimization Theory and Operations Research. – Cham: Springer Nature Switzerland, 2023. – P. 277-291.
12. *Литвинчев И.С., Цурков В.И.* Задачи управления большой размерности с перекрестными связями. 1.Примеры постановок // Матем. моделирование. 1990. Т. 2, N 12. – С. 3-16.