

# ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ СТРАНЫ С ПОМОЩЬЮ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА ИНДЕКСА ПОТРЕБИТЕЛЬСКИХ ЦЕН

Жгун Т.В.

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого,  
Великий Новгород, Россия  
Tatyana.Zhgun@novsu.ru

*Аннотация.* Статья посвящена изучению временного ряда, отражающего Индекс потребительских цен за период январь 1991- декабрь 2023, с помощью вейвлет-анализа. В рамках данной работы были рассмотрены вейвлет Морле (другие вейвлеты дают похожие результаты). Полученные результаты позволяют увидеть, что анализируемая экономическая система имеет выраженные изменения структуры в 1998, 2014 и 2022 годах, из которых наиболее значительным событием был кризис 1998 года. Анализ нормализованных частот позволяет предположить, что на границах рассматриваемого интервала наблюдения могут быть значительные изменения, схожие по интенсивности.

*Ключевые слова:* анализ временных рядов, вейвлет-преобразование, нестационарные процессы, Индекс потребительских цен.

## Введение

Для характеристики общего состояния экономики в целом, для оценки перспективы вложений в целом и определения оптимальных направлений для инвестирования основным фактором является уровень инфляции. Частичное представление о нем дает макроэкономический индикатор, получивший название индекс потребительских цен

Индекс потребительских цен (ИПЦ, в английском варианте – Customer Price Index, *CPI*) синтетический показатель, который показывает относительное изменение стоимости потребительской корзины в текущем периоде по сравнению с базовым.

Методика расчета определяет *CPI* как отношение суммарной стоимости статей расходов в корзине в текущий (отчетный) период к ее стоимости в базовом (принятом за эталон). В общем случае формула имеет вид:

$$CPI = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i^0 P_i^t}{\sum_{i=1}^n Q_i^0 P_i^0}, \quad (1)$$

$n$  – число позиций в потребительской корзине;

$Q_i^0$  – вес каждой позиции в корзине в течение базового периода;

$P_i^0, P_i^t$  – цена каждой позиции корзины соответственно в базовом и отчетном периодах.

Хотя *CPI* принято считать основным показателем инфляции, он отражает только ее часть, называемую потребительской. Фактически индекс показывает снижение покупательской способности населения, в то время как инфляция вообще (обесценивание денег государства) имеет и другие составляющие.

В России расчет индекса потребительских цен проводится Росстатом, его результаты публикуются ежемесячно, ежеквартально и ежегодно. Ранее российская методология включала понятие «минимальная корзина», в которую входил набор товаров и услуг, минимально необходимый для обеспечения нормальной жизнедеятельности человека. Сегодня от минимальной корзины отказались, для расчета *CPI* используется фиксированный перечень товаров и услуг, в том числе: продукты питания (порядка 30% состава корзины); непродовольственные товары; услуги, в том числе коммунальные.

В исследовании Росстата, определяющих значение *CPI*, участвуют 80 тыс. граждан России, проживающих в 282 населенных пунктах и 80 тыс. организаций розничной торговли. Всего в ИПЦ входит 558 товаров и услуг. Для определения значения *CPI* ежемесячно Росстат собирает около 700 тыс. ценовых показателей. Методологии расчета и использования индекса потребительских цен в разных странах могут заметно отличаться. Во Франции в потребительскую корзину входит 250 товаров и услуг, в Великобритании — 699, в Германии — 475.

Хотя *CPI* и принято считать основным показателем инфляции, он отражает только ее часть, называемую потребительской. Фактически индекс показывает снижение покупательской способности

населения, в то время как вообще инфляция (обесценивание денег государства) имеет и другие составляющие.

Текущий мониторинг *CPI* является инструментом для решения финансовых задач. Например, отслеживание данных по индексу потребительских цен входит в число важнейших задач любого инвестора. Изменение базовых процентных ставок, что отражается на всех рынках, является самым действенным способом снижения инфляционного давления в стране. Поэтому отслеживание индекса и, соответственно, прогнозирование уровня ставок помогают увеличить доходность инвестиций или избежать незапланированных потерь.

Однако ретроспективный анализ динамики изменения *CPI* может многое сообщить о глобальных особенностях функционирования экономики в стране. Рассматривая значения показателя *CPI* как значения сигнала, фиксируемого системами регистрации данных, можно оценить глубину кризисов и сравнить их по силе воздействия на систему, оценить масштаб структурных преобразований в экономике страны.

Целью данного исследования является исследование временного ряда статистических данных, отражающих изменение индекса потребительских цен методами вейвлет-анализа для оценки кризисных явлений и масштаба структурных преобразований в экономике страны.

## 1. Методы исследования

Инженер-геофизик Д. Морле в конце 70-х годов XX в. столкнулся с проблемой анализа сигналов от сейсмодатчиков. Сигнал содержал одновременно две компоненты: высокочастотную и низкочастотную. Высокочастотная компонента характеризовала сейсмическую активность в течение короткого промежутка времени, а низкочастотные составляющие – спокойное состояние земной коры – в течение длительного периода.

Преобразование Фурье позволяет анализировать либо высокочастотную составляющую, либо низкочастотную составляющую, но не обе составляющие сразу. Поэтому был предложен метод анализа, в котором ширина оконной функции для низких частот увеличивалась, а для высоких частот – уменьшалась.

Новое оконное преобразование получалось в результате растяжения (сжатия) и смещения по времени одной порождающей (так называемой скэйлинг функции – (scaling function, scalet). Эта порождающая функция была названа вейвлетом. Английское слово wavelet – вейвлет – являющееся переводом французского «ondelette», можно формально перевести на русский язык словосочетанием «маленькая волна», «небольшое колебание», «компактная волна», «всплеск»). На базе такого подхода возникло целое направление в теории обработки сигналов, получившее название вейвлет анализа.

Термин «вейвлет» (wavelet) ввели в своей статье Гроссман (Grossmann) и Морле (Morlet) [1] в середине 80-х годов в связи с анализом свойств сейсмических и акустических сигналов. Их работа послужила началом интенсивного развития вейвлетов в последующее десятилетие рядом исследователей [2].

Традиционным инструментом для обработки данных такого типа является преобразование Фурье. Однако предложенное вейвлет-преобразование данных обладает большей информативностью и может выявлять особенности данных, не обнаруживаемые при традиционном подходе.

Частотная информация крайне необходима для более полного анализа сигналов. Зачастую информация, не заметная во временном представлении, проявляется в частотном представлении. Так бывает, например, с электрокардиограммой (ЭКГ). Типичный вид ЭКГ хорошо известен кардиологам. Любое значительное отклонение от него рассматривается как патология. Эта патология не всегда может быть заметна во временном представлении сигнала. Поэтому в последних моделях электрокардиографов для анализа используется и частотное представление сигнала.

Спектр Фурье позволяет выявить наличие той или иной частоты в сигнале. Но по спектру Фурье нельзя узнать, в какой именно момент времени возникла (или исчезла) та или иная частота. Впрочем, эта информация и не требуется, если сигнал стационарный

Основная идея вейвлет-преобразования отвечает специфике многих сигналов, демонстрирующих эволюцию во времени своих основных характеристик: среднего значения, дисперсии, периодов, амплитуд и фаз гармонических компонентов. Подавляющее большинство процессов, изучаемых в различных областях знаний, имеют вышеперечисленные особенности [3-7].

Вейвлет – это функция  $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$  с нулевым средним значением

$$\int_R \psi(t) dt = \hat{\psi}(t) = 0 \quad (2)$$

единичной нормой и центром в точке  $t = 0$ . Также необходимо, чтобы преобразование Фурье вейвлет-функции достаточно быстро убывало, а именно

$$|\hat{\psi}(\omega)| \leq C (1 + |\omega|)^{-1-\varepsilon} \quad (3)$$

при некоторых  $\varepsilon \geq 0$  и  $C > 0$ . Для приложений бывает важно, чтобы вейвлет-функция имела  $N$  нулевых моментов, т.е.

$$\int_R \psi(t) \cdot t^p dt = 0, p = 0, 1, \dots, p-1. \quad (4)$$

Результатом вейвлет-преобразования функции  $f(t)$  по анализирующему вейвлету  $\psi(t)$  является вейвлет-спектр  $W(a,b)$ , определяемый как функция

$$W(a,b) = |a|^{-1/2} \int_R f(t) \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (5)$$

где  $\psi^*(t)$  – комплексно сопряженная функция к функции  $\psi(t)$ ,

$a$  – переменная, задающая параметр масштаба (большие значения соответствуют низким частотам, малые – высоким),

$b$  – переменная, задающая параметр временного сдвига.

Для отрезка дискретного ряда  $f(t)$  с единичным шагом вейвлет-спектр  $W(a,b)$

$$W(a,b) = |a|^{-1/2} \sum_{t=1}^N \int_R f(t) \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right), \quad (6)$$

$a$  – переменная, задающая параметр масштаба, любое положительное число,

$b$  – целое число от 0 до  $N-1$ .

Визуализация полученных данных может быть различной, но чаще всего изображение проецируется на плоскость  $ab$  или  $\omega b$ , где  $\omega = 1/a$ .

## 2. Анализ результатов

На рис.1 представлена динамика  $CPI$  за период январь 1991- декабрь 2023 (384 наблюдения), а точнее, отклонение от единицы этого показателя. Такое представление позволяет оценить лишь относительный масштаб изменения уровня цен начала девяностых годов относительно всего периода – значительный всплеск значений в начале периода наблюдения нивелирует дальнейшие изменения.

На рис.1 можно увидеть высокочастотную компоненту (резкая активность изменения показателя) в течение короткого промежутка времени и низкочастотные составляющие (спокойное состояние показателя) – в течение длительного периода. Анализ графика позволяет сделать предположение о стабилизации процессов в экономике после 1996 года и об отсутствии структурных изменений после этого года.

Применим вейвлет-преобразование к этому ряду. В качестве анализирующей функции рассмотрим вейвлет Морле. Вычисления производились в среде Matlab [6,7].

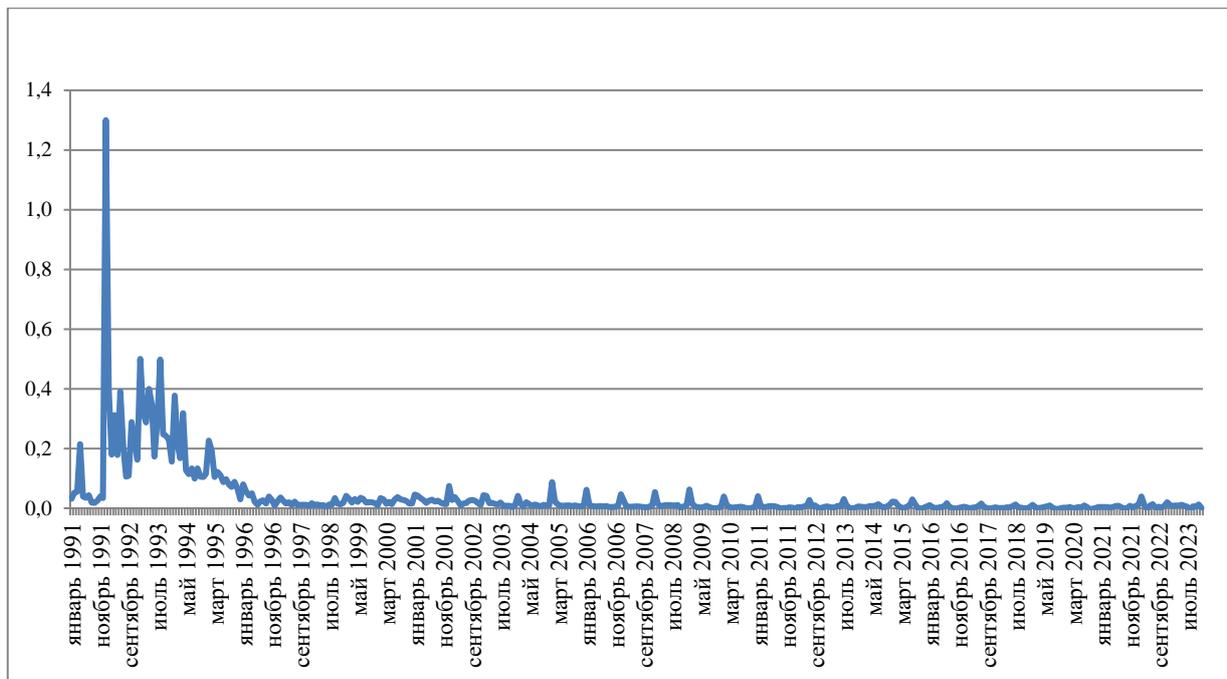
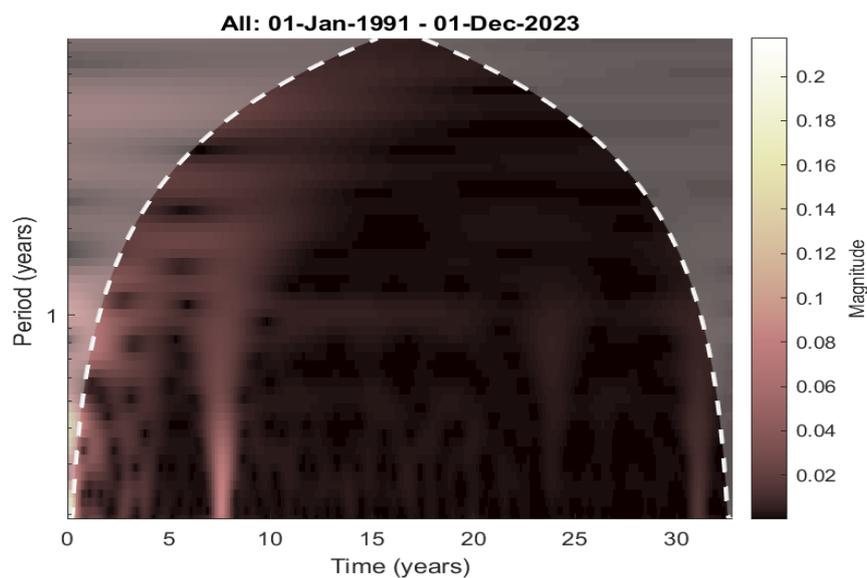


Рис. 1. Индекс потребительских цен за период январь 1991- декабрь 2023

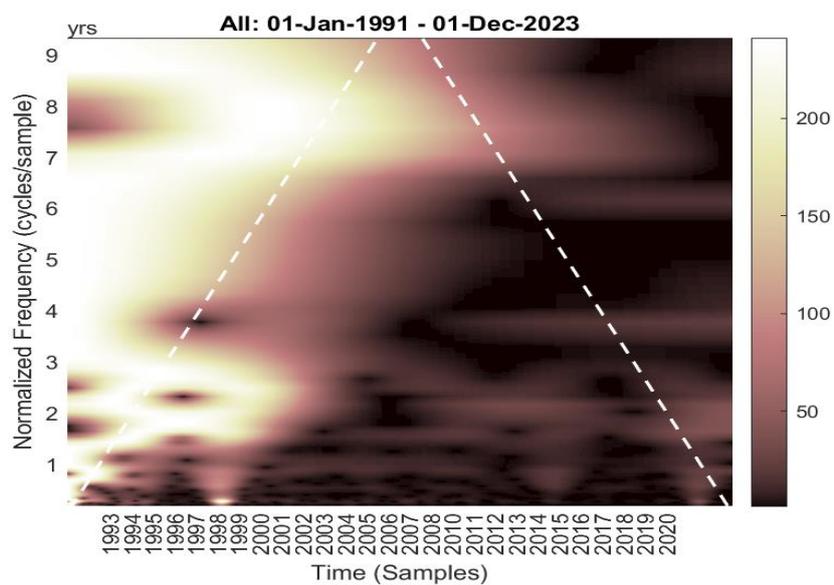
На рис.2 представлено построение вейвлет-спектра значений *CPI* за весь период наблюдения с января 1991 г. по декабрь 2023 года. По оси абсцисс откладывается временная координата, по оси ординат откладывается период – вычисленное значение, обратное к частоте. Полученная картинка отражает частотно-временные характеристики сигнала. Чем больше та или иная частота имеется в сигнале в рассматриваемый момент времени, тем более темным будет оттенок точки на плоскости.

Темные области на рис. 2 (магнитуду которых визуально можно определить как 0,02-0,04) свидетельствуют о стабильном состоянии исследуемого процесса и, соответственно, об отсутствии предпосылок к изменению рассматриваемого индекса на интервале, соответствующем темным областям. В то же время яркие области характеризуют обратное. Самые яркие области вейвлет-спектра (магнитуда около 0,15) свидетельствуют о наличии некоторой возмущающей силы, вызывающей изменение ситуации. Наиболее сильными являются возмущения 1998 года, а не 1991, как это можно было бы предположить по характеру изменения наблюдаемого параметра (рис.1).

Представление результатов вейвлет-анализа по нормализованным частотам (рис. 3) позволяет проследить, какие частоты (периоды) преобладали в рассматриваемый период. Яркая точка в 1998 году показывает, что в этот год имелись сильные, почти мгновенные возмущения системы. И в этом же году наиболее сильно действовали возмущающие воздействия 1994-2000 годов периода около 2,5 и 1,5 лет, а также, возможно, этот год был годом наибольшего влияния 7-8 летнего цикла изменений. Но эта яркая светлая область лежит за пределами границы достоверности, поэтому последний вывод предположительный.



*Рис. 2. Построения вейвлет- спектра значения CPI за период с января 1991 г. по декабрь 2023 года*



*Рис. 3. Построения вейвлет- спектра значения CPI за период с января 1991 г. по декабрь 2023 года по нормализованным частотам*

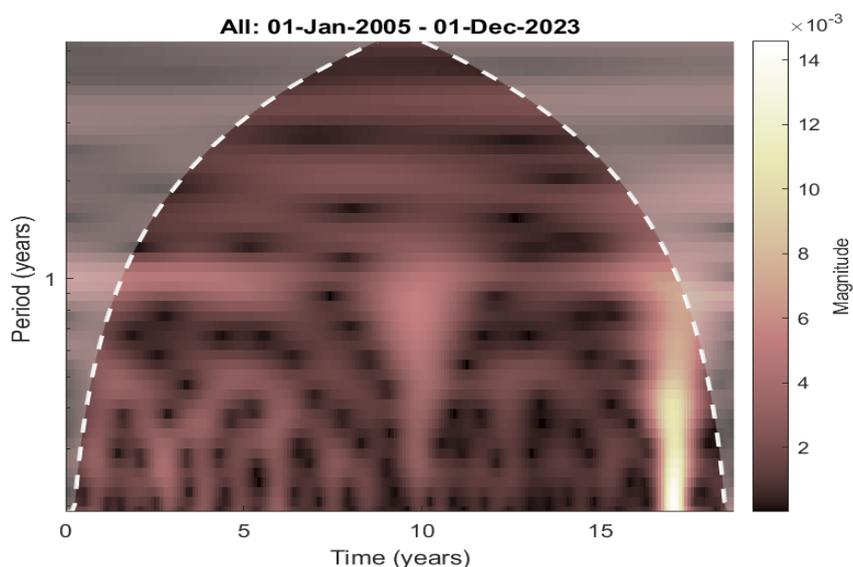


Рис. 4. Построения вейвлет- спектра значения CPI за период с января 2005 г. по декабрь 2023 года

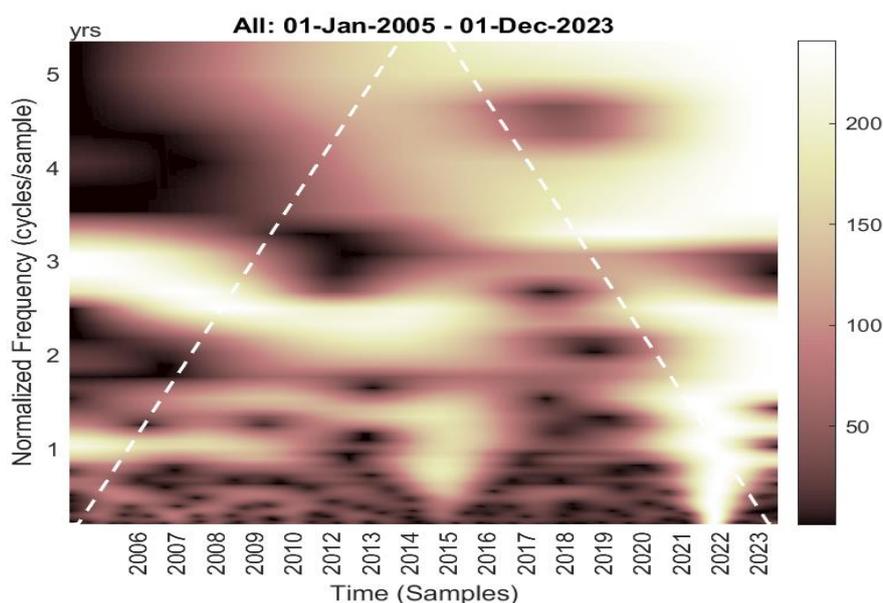


Рис. 5. Построения вейвлет- спектра значения CPI за период с января 2005 г. по декабрь 2023 года по нормализованным частотам

На рис.4 и 5 более подробно рассмотрена ситуация с начала 2005 года. В этот период можно увидеть вмешательства внешних воздействий в 2014 году (слабая засветка около 10 года наблюдения) и в 2022 году (более сильный всплеск яркости на правом крае наблюдений). Эти воздействия были при другом разрешении незаметны на рис. 2, а при уменьшении интервала наблюдения можно оценить сравнительный масштаб кризисов наблюдаемой системы в 2014 и 2022 году. Значения магнитуд в эти годы отличается примерно в 2 раза. Можно предположить, что масштаб воздействий на образующие системы страны в эти годы находится в том же отношении. Т.е. изменения в наблюдаемой системе примерно в два раза масштабнее в 2022 году, чем в 2014.

Представление результатов вейвлет-анализа по нормализованным частотам за период с января 2005 г. по декабрь 2023 года (рис. 5) позволяет увидеть схожесть ситуаций в 2014 и 2022 годах. Хотя в 2014 году видны более сильные воздействия в среднем диапазоне частот, действующие в интервале 2005-2014 года. Также можно увидеть, что в 2016 году начались изменения структуры на всех частотах: как мгновенных периодом менее года, средних, глубоких в низких частотах (4-5 лет), Окончание действия глубокие изменений в низких частотах лежит за пределами наблюдаемого периода. Это схоже с

ситуацией в начале наблюдения (рис.3), но там структура менялась масштабнее на более низких частотах (7-9 лет).

### 3. Заключение

При помощи вейвлет-анализа временного ряда, отражающего Индекс потребительских цен за период январь 1991 - декабрь 2023 замечено, что анализируемая экономическая система имеет выраженные изменения структуры в 1998, 2014 и 2022 годах, их которых наиболее значительным событием был кризис 1998 года. Сравнение магнитуд позволяет сравнить масштабы изменений: 0,15 для 1998 года, 0,015 для 2022 и 0,007 для 2014 года

Анализ нормализованных частот позволяет предположить, что на границах интервала наблюдения могут быть значительные изменения структуры системы, схожие по интенсивности. Изменения такого характера в начале девяностых имели место быть, а изменения далее 2023 года являются прогнозом.

### Литература

1. *Grossmann A. and Morlet J.* "Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1984. – Vol. 15, N 4. – P. 723-736.
2. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. – М.: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2004. – 464 с.
3. *Астафьева Н.М.* Вейвлет анализ: основы теории и примеры применения. //Успехи физических наук. 1998. Т.166. Вып.11. – С. 1145–1170.
4. *Блаттер К.* Вейвлет анализ. Основы теории. – М.: Техносфера, 2004. – 273 с.
5. *Воробьев В.И., Грибунин В.Г.* Теория и практика вейвлет преобразования. – СПб.: ВУС, 1999. – 208 с.
6. *Дьяконов В.П., Абраменкова И.В.* MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002. – 602 с.
7. *Дьяконов В.П.* Вейвлеты. От теории к практике. – М.: СОЛОН-Р, 2002. – 400 с.