НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ОРБИТАЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ЗАРЯЖЕННОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА[1]

Клюшин М.А., Максименко М.В., Сахаров В.Ю., Тихонов А.А.
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
st076414@student.spbu.ru,m.v.maksimenko@spbu.ru, v.sakharov@spbu.ru, a.tikhonov@spbu.ru

Аннотация. Исследуется влияние силы Лоренца на орбиту заряженного космического аппарата (КА) в околоземном пространстве. Выведена нелинейная система дифференциальных уравнений движения КА. На основе аналитического исследования дано объяснение выявленному путем компьютерного моделирования резонансному нарастанию координат КА. Для стабилизации орбиты КА построен ПИД-регулятор.

Ключевые слова: космический аппарат, электростатический заряд, геомагнитное поле, сила Лоренца, орбитальное движение, компьютерное моделирование, резонанс, управление, стабилизация.

Введение

Явление электризации космических аппаратов (КА), движущихся в плазме околоземного пространства, является известным, и во многих случаях оно рассматривается как нежелательное. В условиях, когда проводящая поверхность КА, движущегося в плазмосфере Земли, приобретает потенциал порядка десятков тысяч вольт, могут происходить электрические разряды, вызывающие ложные срабатывания чувствительных микросхем, расположенных в бортовой аппаратуре [1]. Кроме того, взаимодействие заряда КА с магнитным полем Земли (МПЗ) может вызывать изменения в характере орбитального движения КА, на что обращалось внимание как в ранних публикациях [2], так и в более поздних [3].

Вместе с тем, имеются перспективные исследования, связанные с разработками систем активной электростатической защиты КА от ионизирующих излучений, основанные на использовании способности заряженной поверхности отклонять приближающиеся к ней одноименно заряженные частицы [4]. В связи с этим рассмотрение КА, несущих значительный электростатический заряд, приобретает особую актуальность, а изучение динамики таких КА, взаимодействующих с МПЗ посредством лоренцевых сил, становится перспективной задачей, важность которой отражается в публикациях ведущих космических центров мира [5, 6].

1. Математическая модель задачи

Рассмотрим движение КА, несущего постоянный электрический заряд q, в декартовой системе координат $Oxyz$. Начало этой системы совпадает с центром Земли, ось z направлена перпендикулярно плоскости невозмущенной кеплеровой орбиты, ось x лежит в экваториальной плоскости и направлена в восходящий узел орбиты, ось y дополняет систему до правой. В качестве модели МПЗ примем модель “прямого магнитного диполя” с вектором магнитной индукции $\boldsymbol{B} = (B_0/r^5)(3(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} - r^2\boldsymbol{N})$, где $B_0 = 7.812\cdot 10^{15}\text{м}^3\cdot\text{кг}\cdot\text{с}^{-2}\cdot\text{А}^{-1}$ – постоянная земного магнетизма, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)^T$ – радиус-вектор центра масс КА, $\boldsymbol{N}$ – единичный вектор, направленный от географического северного полюса к южному. Обозначим $\omega_e = 7.292\cdot 10^{-5}$ рад/с – величину угловой скорости суточного вращения Земли, $\boldsymbol{\omega_e}$ – соответствующий вектор в системе $Oxyz$, m – массу КА, μ – гравитационный параметр Земли, i – наклонение невозмущенной кеплеровой орбиты.

В данном случае на КА действует гравитационная сила $\boldsymbol{F_g} = -(\mu m/r^3)\boldsymbol{r}$ и сила Лоренца $\boldsymbol{F_L} = q(\boldsymbol{v_r}\times\boldsymbol{B})$, где $\boldsymbol{v_r} = \dot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{\omega_e}\times\boldsymbol{r}$ – скорость КА относительно Земли. В проекциях на оси системы координат $Oxyz$ дифференциальные уравнения движения КА примут вид:

$$\ddot{x} = -\mu x/r^3 + a_{Lx},\ \ddot{y} = -\mu y/r^3 + a_{Ly},\ \ddot{z} = -\mu z/r^3 + a_{Lz}, \tag{1}$$

где

$$a_{Lx} = -(qB_0)/(mr^5)\cdot((3z^2 - r^2)\dot{y}\cos i - (3y^2 - r^2)\dot{z}\sin i + 3yz(\dot{y}\sin i - \dot{z}\cos i) - \\ -\omega_e x(3(y\sin i + z\cos i)^2 - r^2)),$$

[1] *Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-41-02031, https://rscf.ru/project/24-41-02031/.*

$$a_{Ly} = -(qB_0)/(mr^5) \cdot (3(y\,sin\,i + z\,cos\,i)(x\dot{z} - z\dot{x}) + r^2\dot{x}\,cos\,i + 3\omega_e y(z^2 + x^2\,sin^2\,i) +$$
$$+\omega_e(r^2(y\,cos\,i + 2z\,sin\,i)\,cos\,i - 6yz(y\,sin\,i + z\,cos\,i)\,cos\,i)),$$
$$a_{Lz} = -(qB_0)/(mr^5) \cdot (3(y\,sin\,i + z\,cos\,i)(y\dot{x} - x\dot{y}) - r^2\dot{x}\,sin\,i + 3\omega_e z(x^2\,cos^2\,i - y^2) +$$
$$+\omega_e(r^2(2y\,cos\,i + z\,sin\,i)\,sin\,i + 6yz(y\,cos\,i - z\,sin\,i)\,cos\,i)).$$

Рассмотрим сферическую систему координат (r, φ, θ), где r – расстояние до начала координат, φ – азимутальный угол, θ – угол наклона радиус-вектора по отношению к плоскости орбиты. Декартовы координаты (x, y, z) выражаются через сферические следующим образом: $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\cos\theta\sin\varphi$, $z = r\sin\theta$. Считая $|\theta| \ll 1, |\dot{\theta}| \ll 1$ и пренебрегая членами второго порядка малости, получим частично линеаризованную систему дифференциальных уравнений, записанную в проекциях на орты сферической системы координат:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\mu/r^2 - (qB_0)/(mr^2) \cdot (\omega_e\,sin^2\,i\,cos^2\,\varphi - \omega_e\theta\,cos\,i\,sin\,i\,sin\,\varphi +$$
$$+(\dot{\varphi} - \omega_e\,cos\,i)\theta\,sin\,i\,sin\,\varphi - (\dot{\varphi} - \omega_e\,cos\,i)\,cos\,i + \dot{\theta}\,sin\,i\,cos\,\varphi), \tag{2}$$

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = -(qB_0)/(mr^3) \cdot (2\omega_e r\,sin^2\,i\,cos\,\varphi\,sin\,\varphi + \dot{r}\,cos\,i +$$
$$+2\omega_e r\theta\,cos\,i\,sin\,i\,cos\,\varphi + 2r\dot{\theta}\,sin\,i\,sin\,\varphi - \dot{r}\theta\,sin\,i\,sin\,\varphi), \tag{3}$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + r\dot{\varphi}^2\theta = (qB_0)/(mr^3) \cdot (2\omega_e r\theta\,sin^2\,i\,sin^2\,\varphi + \dot{r}\,sin\,i\,cos\,\varphi +$$
$$+2(\dot{\varphi} - \omega_e\,cos\,i)r\,sin\,i\,sin\,\varphi + 2(\dot{\varphi} - \omega_e\,cos\,i)r\theta\,cos\,i). \tag{4}$$

2. Компьютерное моделирование

Исследуем орбитальное движение заряженного КА, выведенного на наклонную круговую орбиту. Пусть $\Delta r = r - r_0$– отклонение радиуса возмущенной орбиты от радиуса первоначальной круговой кеплеровой орбиты ($r_0 = const$). Аналогично,$\Delta\omega = \dot{\varphi} - \omega_0$ – отклонение величины орбитальной угловой скорости от постоянного значения $\omega_0 = const$. Проведем численное моделирование орбитального движения, заряженного КА в рамках нелинейной модели (1) с помощью программы, написанной на языке C++. В основе работы данной программы лежит метод Рунге-Кутты 4-го порядка [7].

Таблица 1. Значения величин, выбранных для численного интегрирования

Величина	m, кг	q, Кл	μ, км^3/с^2	r_0, км	ω_0, рад/с	i, °
Значение	100	0.001	398600.442	6800	0.0011259	50

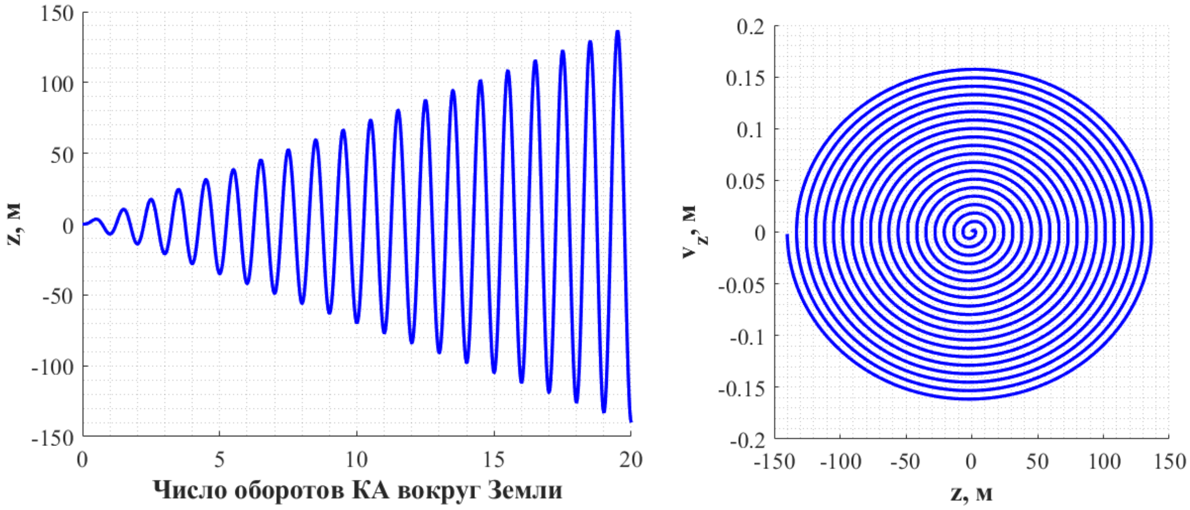

Рис. 1. Движение КА вдоль оси Oz

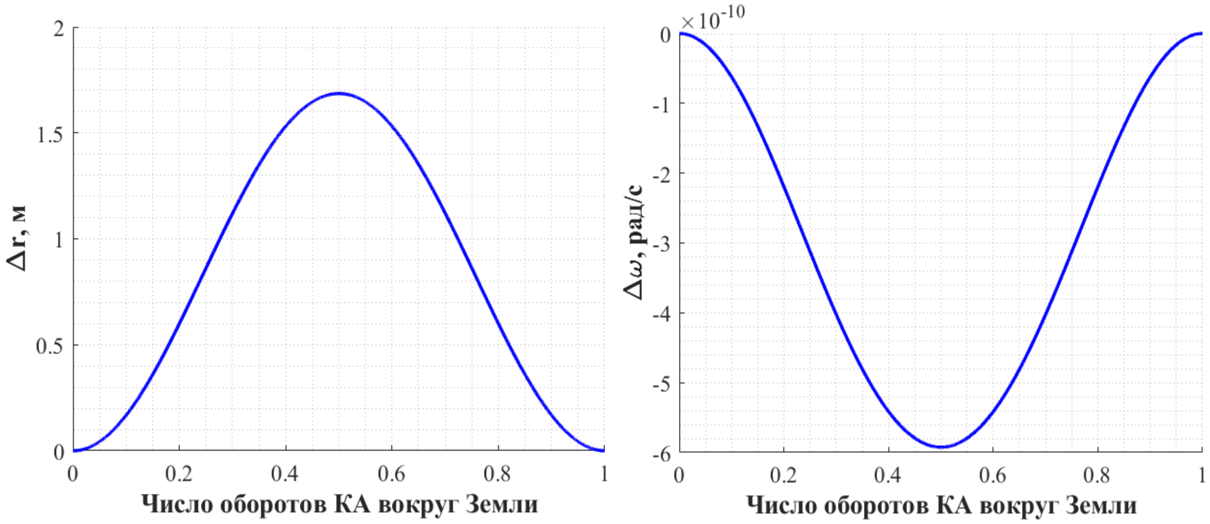

Рис. 2. Отклонения радиуса орбиты и величины орбитальной угловой скорости от постоянных значений

Анализ графика на рис. 1 показывает, что центр масс заряженного КА в процессе движения покидает плоскость исходной орбиты. На фазовой плоскости $(z, \dot{z})$ этот процесс удаления центра масс КА от плоскости исходной орбиты описывается траекториями, характерными для неустойчивого фокуса. Отклонения величины радиус-вектора центра масс КА и орбитальной угловой скорости (рис. 2) от постоянных значений, имеющих место при отсутствии заряда, имеют периодический характер.

Таким образом, компьютерное моделирование выявило, что влияние МПЗ на заряженный КА приводит к эволюции орбиты КА. Для объяснения наблюдаемого эффекта займемся аналитическим исследованием системы дифференциальных уравнений движения.

3. Анализ дифференциальной системы

Проведенное численное исследование показало, что $|\Delta r| \ll r_0, |\Delta\omega| \ll \omega_0$, причем Δr и $\Delta\omega$ меняются со временем. Введем безразмерные малые переменные, характеризующие отклонения параметров возмущенной орбиты от первоначальной кеплеровой:$\rho = \Delta r/r_0,\ \nu = \Delta\omega/\omega_0$, а также безразмерное время $\tau = \omega_0 t$. Обозначим $\gamma = \omega_e/\omega_0,\ \varepsilon = qB_0/(m{r_0}^3\omega_0),\ '$ – производную по τ. В ходе компьютерного моделирования установлено, что ρ, ν и θ имеют порядок $O(\varepsilon)$. Тогда, пренебрегая в уравнениях движения (2)–(4) членами порядка $O(\varepsilon^2)$, получим:

$$\begin{cases} \rho'' - 3\rho - 2\nu = -\varepsilon\gamma \sin^2 i \cos^2\tau + \varepsilon(1-\gamma\cos i)\cos i\,, \\ \nu' + 2\rho' = -2\varepsilon\gamma\sin^2 i\cos\tau\sin\tau\,, \\ \theta'' + \theta = 2\varepsilon(1-\gamma\cos i)\sin i\sin\tau\,. \end{cases} \tag{5}$$

Стоит отметить, что при$\varepsilon = 0$система (5) имеет тривиальное решение, поскольку отсутствуют возмущения, вызванные силой Лоренца. Нетрудно найти частное решение системы (5). Возвращаясь к размерным переменным, получим:

$$\begin{cases} \Delta r = \big(\varepsilon r_0/(2\omega_0)\big)(2\omega_0\cos i - 2\omega_e - \omega_e\sin^2 i)(1-\cos(\omega_0 t)), \\ \Delta\omega = \varepsilon(2\omega_0\cos i - 2\omega_e - \omega_e\sin^2 i)(\cos(\omega_0 t) - 1) - \varepsilon\omega_e\sin^2 i\sin^2(\omega_0 t)\,, \\ \theta = -\varepsilon\sin i\,(\omega_0 - \omega_e\cos i)t\cos(\omega_0 t)\,. \end{cases} \tag{6}$$

Оказывается, что в третьем уравнении системы (5) компонента возмущающей силы Лоренца действует на КА с частотой, совпадающей с частотой собственных колебаний КА по углуθ, что приводит к главному резонансу и вызывает вековое увеличение (по абсолютной величине) угла отклонения центра масс КА от плоскости исходной орбиты. Можно заметить, что отклоненияΔr и $\Delta\omega$имеют периодический характер и происходят с частотой, равной орбитальной угловой скорости при кеплеровом движении.

Проведем сравнение аналитического решения (6) с численным решением, представленным в предыдущем разделе на рис. 1 и рис. 2:

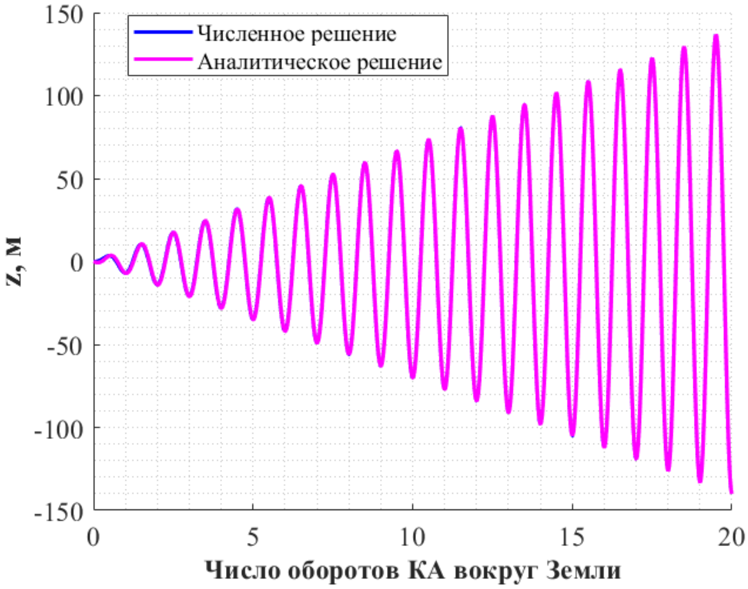

Рис. 3. Сравнение численного и аналитического решений

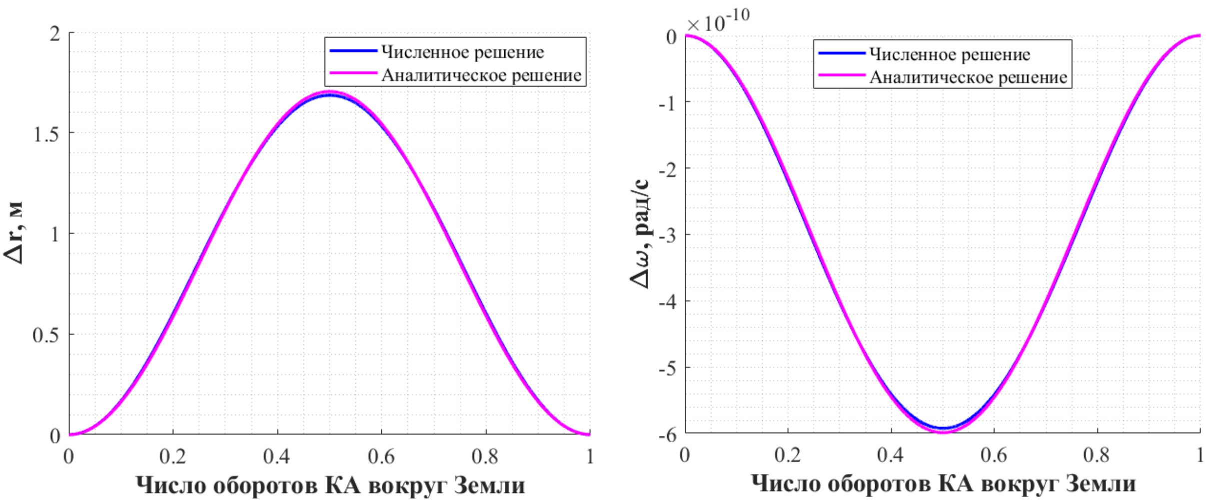

Рис. 4. Сравнение численного и аналитического решений

Анализ графиков на рис. 3 и рис. 4 показывает, что приближенное аналитическое решение и решение, полученное с помощью компьютерного моделирования, почти идеально совпадают.

Дополнительно были построены графики относительной ошибки для отклонений величины радиус-вектора$\Delta r_{ош} = (max|\Delta r_{числ} - \Delta r|)/\Delta r_{числ}$ и орбитальной угловой скорости $\Delta\omega_{ош} = (max|\Delta\omega_{числ} - \Delta\omega|)/\Delta\omega$ в зависимости от наклонения исходной орбиты, где $\Delta r_{числ}$ и $\Delta\omega_{числ}$ – соответствующие численные решения.

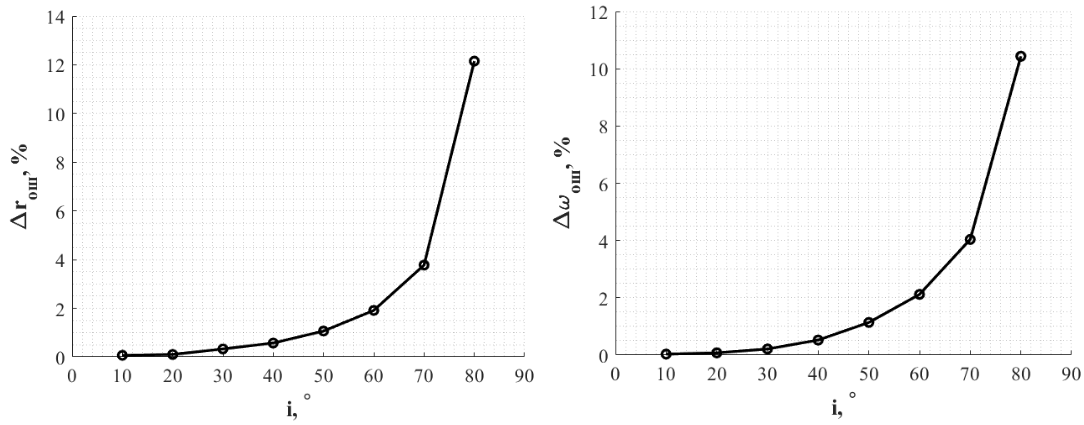

Рис. 5. Графики относительной ошибки

Как видно из графиков на рис. 5, с увеличением наклонения орбиты происходит рост относительной ошибки, причем резкое увеличение происходит, начиная с наклонения около 70°. Для орбит с меньшими наклонениями ошибка составляет менее 4%, что вполне допустимо. Также следуетзаметить, что рост ошибки более, чем на 10%, в действительности не оказывает существенного влияния, поскольку отклонения рассматриваемых величин малы.

На данном этапе был выявлен и обоснован резонансный эффект, проявляющийся в постепенном нарастании амплитуды колебаний центра масс КА. Стоит отметить, что обнаруженные колебания приводят к значительному отдалению КА от первоначальной орбиты. Исходя из этого, имеет смысл рассмотрение задачи о стабилизации КА в плоскости орбиты.

4. Управление орбитальным движением КА

Целью управления будем считать погашение колебаний центра масс КА вдоль оси *Oz*. Рассмотрим способ управления, основанный на применении ПИД-регулятора, структурная схема которого представлена на рис. 6.

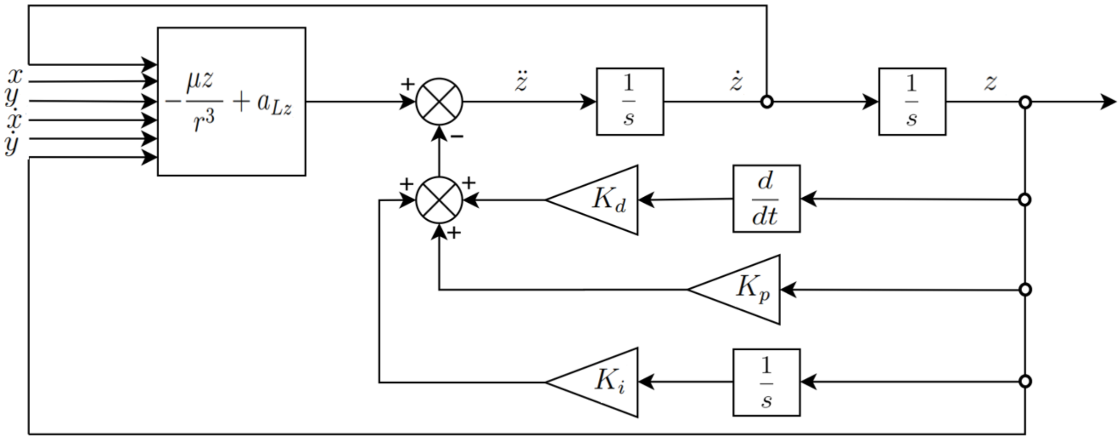

Рис. 6. Структурная схема ПИД-регулятора

Соответствующая дифференциальная система будет иметь следующий вид:

$$\ddot{x} = -\mu x/r^3 + a_{Lx},\ \ddot{y} = -\mu y/r^3 + a_{Ly},\ \ddot{z} = -\mu z/r^3 + a_{Lz} - K_p z - K_i \int_0^t z dt - K_d \dot{z}, \tag{7}$$

гдеK_p, K_iи K_d – постоянные коэффициенты, находящиеся в нашем распоряжении. В ходе численных экспериментов были подобраны следующие коэффициенты: $K_p = 5.5 \cdot 10^{-5}\text{с}^{-2}$, $K_i = 1 \cdot 10^{-5}\text{с}^{-3}$, $K_d = 1.7 \cdot 10^{-4}\text{с}^{-1}$.Ниже приведены результаты численного интегрирования системы (7) со значениями величин из Таблицы 1.

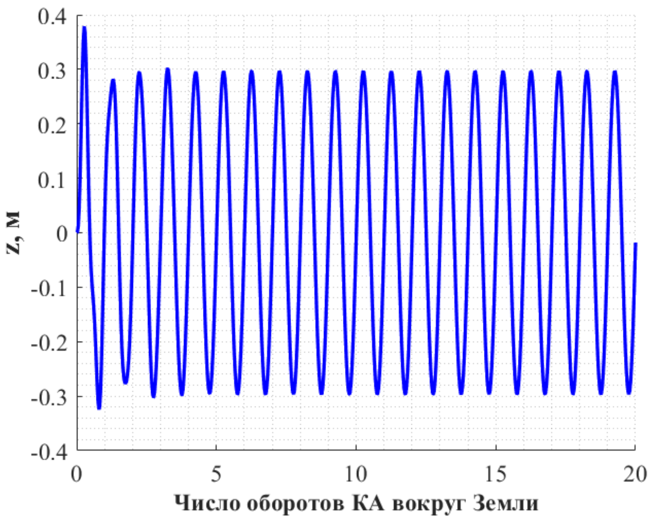

Рис. 7. Результат работы ПИД-регулятора

Как видно из графика на рис. 7, удалось добиться стабилизации центра масс КА в малой окрестности первоначальной орбиты. Детальное изучение процесса управления показало, что окончательная стабилизация КА достигается (в достаточной степени точности) на 15-м обороте вокруг Земли.

5. Заключение

Таким образом, в ходе проделанной работы было проведено компьютерное моделирование орбитального движения, заряженного КА в гравитационном и магнитном полях Земли на основе нелинейной системы дифференциальных уравнений. Было выявлено, что под влиянием геомагнитного поля происходит эволюция орбиты, заключающаяся в постепенном отдалении центра масс КА от плоскости исходной орбиты.

Проведенное аналитическое исследование дифференциальной системы обосновывает наблюдаемый эффект. Оказалось, что возмущающее воздействие силы Лоренца на КА оказывается резонансным и приводит к вековому изменению угла отклонения КА от плоскости невозмущенной орбиты. В поведении величины радиус-вектора и орбитальной угловой скорости подобного резонансного эффекта не наблюдается: их изменение носит периодический характер. Сравнение аналитического и численного решений показывает высокую точность компьютерного моделирования в рамках рассматриваемой математической модели.

Была поставлена задача о погашении колебаний центра масс КА вдоль оси, перпендикулярной плоскости первоначальной орбиты. Предложенное управление, основанное на применении ПИД-регулятора, обеспечивает стабилизацию КА в малой окрестности первоначальной орбиты.

Литература

1. *Любомудров А.А., Ефанов В.В., Горовцов В.В., Кузин Е.Н.* Электромагнитные помехи, генерируемые в космическом аппарате при электризации // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2018. N 2. – С. 87–92.
2. *Нестеренко О.П.* Движение электрически заряженного спутника в магнитном поле Земли // Космические исследования. 1969. Т. 7, N 3. – С. 359–367.
3. *Vokrouhlicky D.* The geomagnetic effects on the motion of an electrically charged artificial satellite // Celestial Mech DynAstr. 1989. Vol. 46. – P. 85–104.
4. *Рябова Т.Я.* Электростатическая защита от космических излучений (Современное состояние и перспективы) //Космич. биолог.и авиакосмич. мед. 1983. Т. 17, N 2. – С. 4–7.
5. *Pollock G.E., Gangestad J.W., Longuski J.M.* Analytical solutions for the relative motion of spacecraft subject to Lorentz-force perturbations // Acta Astronautica. 2011. Vol. 68. – P. 204–217.
6. *Huang X., Yan Y., Zhou Y.* Dynamics and control of spacecraft hovering using the geomagnetic Lorentz force // Advances in Space Research. 2014. Vol. 53. – P. 518–531.
7. *Иванов Д.С., Трофимов С.П., Широбоков М.Г.* Численное моделирование орбитального и углового движения космических аппаратов / М.Ю.Овчинников. – М.: Изд-во ИПМ им. М. В. Келдыша, 2016. – 118 с.