

# ДИНАМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ ОДНОГО КЛАССА<sup>1</sup>

Кокунько Ю.Г., Краснов Д.В.

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия*

*juliakokunko@gmail.com, dim93kr@mail.ru*

*Аннотация. Для оценивания производных непрерывных составных сигналов, описываемых фрагментами алгебраических полиномов, разработан наблюдатель с кусочно-непрерывными корректирующими воздействиями с насыщением. Они обеспечивают асимптотически точное дифференцирование и существенно ограничивают всплески оценочных сигналов вначале переходных процессов по сравнению с наблюдателем с обычной линейной коррекцией.*

*Ключевые слова: динамическое дифференцирование, наблюдатель состояния, кусочно-линейная коррекция с насыщением, асимптотические оценки, кусочно-дифференцируемые сигналы.*

## Введение

На практике часто требуется восстановить в реальном времени производные сигналов, аналитический вид которых неизвестен. В системах автоматического управления может потребоваться дифференцирование и внутренних, и внешних сигналов для синтеза обратной связи, активного подавления возмущений, диагностики неисправностей и пр. Так, в системах с неполными измерениями для синтеза пропорционально-дифференциального (ПД) регулятора или регулятора с обратной связью по выходу требуется восстановить не измеряемые переменные состояния. Например, по сигналу датчика положения восстановить скорость и ускорение, т.е. первую и вторую производные. При решении проблемы двукратного дифференцирования сигнала положения с помощью численных методов не нужно устанавливать на объекте управления датчики скорости и ускорения, сигналы которых, как правило, обычно сильно зашумлены [1]. Однако операция численного дифференцирования (в отличие от численного интегрирования) редко применяется в системах автоматического управления, так как при восстановлении производной второго и более высоких порядков становятся ощутимыми и запаздывание, и возбуждение паразитных помех [2]. Учитывая, что качество дифференцирования сигнала, который может быть зашумлен, напрямую влияет на производительность замкнутой системы, целесообразно для решения этой проблемы использовать методы теории наблюдателей состояния и фильтрации.

В данной работе проблема дифференцирования рассматривается применительно к внешним, а именно, к задающим воздействиям, поступающим в систему управления из автономного источника в виде детерминированных непрерывных сигналов. Данная проблема актуальна, в частности, для беспилотных мобильных роботов, управляемых дистанционно, для которых базовая задача состоит в путевой стабилизации и отслеживании заданной траектории. Для функционирования следящих систем с автоматическим управлением, как правило, требуется текущая информация не только о задающих воздействиях, но и об их производных до  $n$ -го порядка включительно, где  $n$  – относительный порядок одноканальной системы (или максимальный элемент вектора относительного порядка многоканальной системы) [3, 4]. Для восстановления производных задающих воздействий будет применяться динамическое дифференцирование, основанное на принципах построения наблюдателей состояния для систем с неопределенным входом. В отличие от других внешних сигналов – неконтролируемых возмущений, которые воздействуют непосредственно на объект управления, задающие воздействия поступают в информационно-управляющую систему и служат для выработки управления, их текущие значения известны. Поэтому динамический наблюдатель для восстановления производных таких сигналов является автономным и не зависит ни от цели управления, ни от процессов, протекающих в замкнутой системе.

В отличие от наблюдателя для оценивания не измеряемых переменных состояния, который строится как копия математической модели объекта управления, основой для построения наблюдателя–дифференциатора задающего воздействия является виртуальная каноническая система с неопределенным входом [5, 6]. Если требуется восстановить  $n$  производных, то роль неопределенного входа играет  $(n+1)$ -я производная задания, которую можно трактовать как внешнее возмущение. В решаемой задаче оно полагается неизвестной ограниченной функцией времени.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 24–21–20009)

В общем случае, когда внешнее возмущение не затухает на периоде наблюдения, то с помощью линейного наблюдателя (стандартного или в виде дифференциатора без собственных движений) можно восстановить текущие значения производных задающего воздействия только с некоторой точностью, которая улучшается с абсолютным ростом коэффициентов корректирующих воздействий [5, 7–9]. Но тогда возникает другая известная проблема – сильные всплески оценочных сигналов вначале переходных процессов, которые увеличиваются с увеличением порядка наблюдателя (т.е. с ростом порядка производных, подлежащих оцениванию).

С теоретической точки зрения только наблюдатели–дифференциаторы с разрывными управлениями, функционирующие в скользящем режиме, могут обеспечить точное дифференцирование [10, 11]. Однако из-за различного рода неидеальностей в оценочных сигналах возникают паразитные помехи («чаттеринг» [12]), поэтому восстановленные сигналы производных также следует признать не точными в практических приложениях. Кроме того, динамический порядок наблюдателей на скользящих режимах в два раза больше размерности линейных наблюдателей из-за ввода низкочастотных фильтров для получения усредненных непрерывных сигналов разрывных корректирующих воздействий. По этой причине в данной работе за основу для построений принимаются наблюдатели с непрерывными корректирующими воздействиями.

В разделе 1 в качестве объекта дифференцирования формализован один класс детерминированных сигналов, старшие производных которых обращаются в нуль или асимптотически стремятся к нулю. Только для сигналов этого класса можно обеспечить асимптотически точное дифференцирование с помощью линейных наблюдателей, копирующих модель объекта наблюдения, при условии, что дифференцируемый сигнал является не только непрерывным, но и гладким. Однако второе условие на практике обычно не выполняется, так как сложные эталонные траектории обычно состоят из фрагментов разных функций [13]. Как следствие, в точках стыка старшие производные терпят разрывы первого рода, что порождает всплески оценочных сигналов. Для того чтобы обойти эту проблему, в разделе 2 вводится наблюдатель–дифференциатор с кусочно-линейными корректирующими воздействиями с насыщением. В работах [6, 14, 15] представлены методы синтеза таких наблюдателей применительно к системам, функционирующим в условиях неопределенности. Научная новизна представленных в данной работе результатов заключается в формализации процедуры настройки кусочно-линейных корректирующих воздействий наблюдателя для канонических систем с определенным входом. В разделе 3 приведены результаты численного моделирования, которые подтверждают обоснованность выбранного метода и эффективность разработанных алгоритмов.

## 1. Описание проблемы и рассматриваемого класса сигналов

Пусть в информационно-управляющую систему объекта управления в реальном времени поступает внешний детерминированный непрерывный сигнал  $f(t) \in R$ . Требуется восстановить в сигнальном виде его  $n$  производных в предположении, что они существуют и ограничены на интервале наблюдения. Измеряются только текущие значения данного сигнала, его аналитическое описание неизвестно. Однако можно построить его динамическую модель, отражающую процесс дифференцирования  $n$  раз по времени функции  $y_0 = f(t)$ , в виде канонической системы вход–выход

$$\dot{y}_i = y_{i+1}, \quad i = \overline{0, n}, \quad (1)$$

где  $y_i(t) = y_0^{(i)}, i = \overline{1, n}$  –  $i$ -е производные, которые требуется восстановить,  $y_{n+1}(t) = y_0^{(n+1)}$  – неопределенный вход, который трактуется как внешнее неконтролируемое возмущение. Очевидно, что система (1) является наблюдаемой относительно измеряемого выхода  $y_0(t)$ .

Идея динамического дифференцирования заключается в том, что для виртуальной системы (1) строится наблюдатель состояния. В результате целенаправленного синтеза переменные наблюдателя сходятся к выходному сигналу  $y_0 = f(t)$  и его производным, т.е. воспроизводят неизвестные производные данного сигнала (как правило, с некоторой точностью), что и решает задачу его дифференцирования.

Соответствующие наблюдатели производных по принципу построения разделяются на два вида: со стандартной структурой полноразмерного наблюдателя, копирующей структуру наблюдаемой модели (1); собственно, дифференциаторы, не имеющие собственной динамики [6, 11, 12]. Типовые корректирующие воздействия наблюдателя для систем с неопределенным входом соответствуют так называемым «силовым» методам подавления неопределенностей. К ним относятся: или глубокие обратные связи (линейные регуляторы с большими коэффициентами усиления) [8], или разрывные

управления с организацией скользящих режимов первого и более высоко порядков [10–12], или их гибриды в виде S-образных функций [14–16]. К последним относятся кусочно-линейные функции с насыщением. По причинам, указанным во введении, для решения поставленной задачи вводится наблюдатель стандартной структуры  $(n+1)$ -го порядка с кусочно-линейными корректирующими воздействиями, построенный в виде физически реализуемой копии системы (1):

$$\dot{z}_i = z_{i+1} + v_i, \quad i = \overline{0, n-1}; \quad \dot{z}_n = v_n, \quad (2)$$

где  $z = (z_0, \dots, z_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$  – вектор состояния,  $v_i$  ( $i = \overline{0, n}$ ) – корректирующие воздействия наблюдателя, которые формируются на основе выходов модели (1)  $y_0(t)$  и наблюдателя  $z_0(t)$ . Задача наблюдения сводится к стабилизации динамической системы, записанной относительно ошибок наблюдения  $\varepsilon_i = y_i - z_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ . В силу (1), (2) данная виртуальная система имеет следующий вид:

$$\dot{\varepsilon}_i = \varepsilon_{i+1} - v_i, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad \dot{\varepsilon}_n = y_{n+1} - v_n. \quad (3)$$

Если в системе (3) функция  $y_{n+1}(t) = y_0^{(n+1)}$  неизвестна, но ограничена, то с помощью линейных корректирующих воздействий можно обеспечить стабилизацию ошибок наблюдения с некоторой точностью.

Выделим класс детерминированных функций  $y_0 = f(t)$ , для которых можно обеспечить асимптотическую стабилизацию системы (3) с помощью линейной коррекции и, как следствие, асимптотически точное дифференцирование.

Если  $y_0 = f(t)$  – алгебраический полиномом с максимальной степенью  $\bar{n} \in \mathbb{N}$ , то тогда его  $(\bar{n} + 1)$ -я производная тождественно равна нулю  $y_{\bar{n}+1}(t) \equiv 0$ . Если  $\bar{n} = n$ , то неопределенный вход в системе (3) отсутствует. Тогда можно использовать стандартную линейную обратную связь

$$v_0 = a_0 \varepsilon_0, \quad v_1 = a_1 \varepsilon_0, \quad \dots, \quad v_n = a_n \varepsilon_0, \quad (4)$$

где  $a_i$  ( $i = \overline{0, n}$ ) – коэффициенты гурвицева полинома

$$\prod_{i=1}^{n+1} (\lambda - \lambda_i) = \lambda^{n+1} + a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n, \quad \lambda_i \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda_i < 0, \quad i = \overline{1, n+1}. \quad (5)$$

При этом матрица замкнутой системы (3)–(4) принимает вид

$$\begin{pmatrix} -a_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

а в системах (3) и (2) обеспечиваются следующие асимптотические равенства:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_i(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} z_i(t) = y_i(t), \quad t = \overline{0, n}. \quad (7)$$

Если  $\bar{n}$ -я производная дифференцируемого сигнала  $y_0^{(\bar{n})}(t)$  удовлетворяет лемме Барбалата, то тогда его  $(\bar{n} + 1)$ -я производная асимптотически затухает  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_0^{(\bar{n}+1)}(t) = 0$ . Если  $\bar{n} = n$ , то в замкнутой системе (3)–(4) с затухающим возмущением также обеспечивается асимптотическая стабилизация (7).

В указанных случаях  $(\bar{n} + 1)$ -я производная дифференцируемого сигнала и все последующие тождественно равны нулю или затухают. Если  $1 \leq \bar{n} < n$ , то тогда динамический порядок наблюдателя (2) можно понизить на  $n - \bar{n}$ . Если  $n < \bar{n} < \infty$ , то тогда асимптотически точное дифференцирование можно обеспечить путем повышения динамического порядка наблюдателя (2) на  $\bar{n} - n$  с тем, чтобы избавиться от неопределенного входа.

Таким образом, класс сигналов, для которых с помощью линейного наблюдателя типа (2), (4) можно обеспечить асимптотически точное дифференцирование до  $\bar{n}$ -го порядка, включает функции

$y_0 = f(t)$ , у которых  $(\bar{n} + 1)$ -я производная тождественно равна нулю или является бесконечно малой при  $t \rightarrow +\infty$ .

Еще раз подчеркнем, что при решении проблемы дифференцирования аналитическая запись  $y_0 = f(t)$  неизвестна. Однако в практических приложениях часто имеют место достоверные гипотезы о типе этого сигнала и предлагаемый метод можно использовать, если есть основание полагать, что этот сигнал принадлежит указанному классу с известным значением  $\bar{n} \in \mathbb{N}$ , который определяет динамический порядок наблюдателя–дифференциатора.

Если дифференцируемый сигнал принадлежит указанному классу и  $y_0 = f(t)$  – гладкая функция,  $f(t) \in C^{\bar{n}+1}$ , то тогда коэффициенты усиления линейных корректирующих воздействий (4) наблюдателя (2) назначаются на основе эталонного полинома (5). Скорость сходимости переменных наблюдателя к восстанавливаемым производным зависит от запаса устойчивости  $\min\{-\operatorname{Re} \lambda_i\}_{i=\overline{1, \bar{n}}}$  эталонного полинома (5). Это значение должно больше, чем запас устойчивости замкнутой управляемой системы, для которой предназначены восстанавливаемые производные задающего воздействия. С ростом запаса устойчивости растут и абсолютные значения коэффициентов усиления (4), что может спровоцировать всплески оценочных сигналов вначале переходного процесса.

В данной работе в качестве объекта наблюдения рассматривается более общий случай, когда дифференцируемый сигнал составлен из функций указанного класса (далее без ограничения общности будем полагать  $\bar{n} = n$ ) и  $y_0 = f(t)$  – непрерывная, но негладкая (точнее, кусочно-гладкая) функция времени. Это означает, что в точках стыка, в которых форма дифференцируемой функции меняется, ее производные могут иметь разрывы первого рода (устранимые или конечные типа скачков). Эти разрывы можно трактовать как переустановку скачком значений соответствующих переменных состояния динамической модели (1), что порождает множественные переходные процессы в наблюдателе (2) и всплески оценочных сигналов при использовании линейной коррекции (4), настроенной по критерию быстродействия. Абсолютная величина выбросов увеличивается с ростом размерности наблюдателя.

В следующем разделе формализована процедура настройки асимптотического наблюдателя–дифференциатора (2) с кусочно-линейной коррекцией с насыщением, который, с одной стороны, обеспечит асимптотически точное дифференцирование, а с другой стороны, поможет избежать указанной проблемы всплесков. Для реализации этого подхода требуется ввести априорное предположение

$$|y_i(t)| \leq Y_i, i = \overline{1, n}, t \in [0, T], \quad (8)$$

которое означает ограниченность оцениваемых сигналов на периоде наблюдения  $t \in [0, T]$  известными положительными константами. В возможных точках конечного разрыва ограничения (8) следует понимать как ограниченность односторонних производных. Ограничения (8) вполне естественны для практических приложений: задающее воздействие должно быть достижимым для объекта управления, в частности, иметь производные, которые по абсолютным значениям не превышают проектные ограничения объекта на скорость, ускорение и производные более высокого порядка.

## 2. Синтез асимптотического наблюдателя с кусочно-линейной коррекцией

С учетом того факта, что текущие значения дифференцируемого сигнала известны, в том числе и в начальный момент времени наблюдения  $y_0(0)$ , можно установить в наблюдателе (2) и, следовательно, в виртуальной системе (3) следующие начальные значения:

$$z_0(0) = y_0(0) \Rightarrow \varepsilon_0(0) = 0, z_i(0) = 0 \Rightarrow |\varepsilon_i(0)| = |y_i(0) - z_i(0)| \leq Y_i, i = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Для наблюдателя (2) вводятся кусочно-линейные корректирующие воздействия с насыщением, каждое из которых имеет два настраиваемых параметра  $p_i > 0, l_i > 0$ :

$$v_0 = p_0 \text{sat}(l_0 \varepsilon_0) = \begin{cases} p_0 \text{sign}(\varepsilon_0), & |\varepsilon_0| > 1/l_0, \\ p_0 l_0 \varepsilon_0, & |\varepsilon_0| \leq 1/l_0; \end{cases} \quad (10)$$

$$v_i = p_i \text{sat}(l_i v_{i-1}) = \begin{cases} p_i \text{sign}(v_{i-1}), & |v_{i-1}| > 1/l_i, \\ p_i l_i v_{i-1}, & |v_{i-1}| \leq 1/l_i, \quad i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

В работах [6, 14, 15] представлены каскадные процедуры настройки параметров корректирующих воздействий (10) для систем с неопределенным входом, имеющие вид неравенств и гарантирующие заданную точность оценивания. Покажем, что в условиях определенности  $y_{n+1}(t) = 0$  в системе (3), (10) можно обеспечить асимптотическую стабилизацию.

Идея каскадного синтеза наблюдателя (2) с кусочно-непрерывными корректирующими воздействиями (10) заключается в том, что с помощью выбора амплитуд  $p_i > 0, i = \overline{0, n}$  обеспечивается последовательная сходимость аргументов корректирующих воздействий в зоны, в которых сами корректирующие воздействия являются линейными:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_0(t)| \leq 1/l_0 &\Rightarrow v_0 = p_0 l_0 \varepsilon_0, t \geq t_0 \geq 0 \Rightarrow |v_0(t)| = |\varepsilon_1(t) - \dot{\varepsilon}_0(t)| \leq 1/l_1 \Rightarrow v_1 = p_1 l_1 v_0, t \geq t_1 > t_0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\varepsilon_2(t) - \dot{\varepsilon}_1(t)| \leq 1/l_2 \Rightarrow v_2 = p_2 l_2 v_1, t \geq t_2 > t_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\varepsilon_n(t) - \dot{\varepsilon}_{n-1}(t)| \leq 1/l_n \Rightarrow v_n = p_n l_n v_{n-1}, t \geq t_n > t_{n-1}, t_n \ll T. \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда при  $t \geq t_n$  виртуальная замкнутая система (3), (10) становится полностью линейной, а ее матрица принимает вид (6), где

$$a_0 = p_0 l_0, a_1 = p_1 l_1 p_0 l_0, a_2 = p_2 l_2 p_1 l_1 p_0 l_0, \dots, a_n = p_n l_n p_{n-1} l_{n-1} \dots p_1 l_1 p_0 l_0, \quad (12)$$

что обеспечивает решение поставленной задачи (7).

Учитывая асимптотический характер сходимости с высоким быстродействием и ошибок наблюдения, и их производных, для выбора амплитуд корректирующих воздействий, обеспечивающих (11), используем грубую схему настройки. В этой схеме, в отличие от [6, 14, 15], не учитывается время сходимости в линейные зоны и затухания производных ошибок наблюдения, полагается, что  $\dot{\varepsilon}_i(t) \approx 0, t > t_i, i = \overline{0, n-1}$ . С учетом (9) дадим консервативную оценку возможных вариаций ошибок наблюдения производных дифференцируемого сигнала в переходном процессе:

$$|\varepsilon_i(t)| \leq 2Y_i, \quad i = \overline{1, n}, 0 \leq t \leq t_i. \quad (13)$$

С учетом (10) и оценок (13), которые распространяются на все переходные процессы периода наблюдения, вызванные сменой формы дифференцируемого сигнала, в рамках грубой настройки формализуем достаточные условия для выбора амплитуд кусочно-линейных корректирующих воздействий, обеспечивающих (11) и линейный вид (6), (12):

$$\begin{aligned} p_i > 2Y_{i+1} &\Rightarrow \varepsilon_i \dot{\varepsilon}_i = \varepsilon_i (\varepsilon_{i+1} - p_i \text{sign}(\varepsilon_i)) \leq |\varepsilon_i| (2Y_{i+1} - p_i) < 0, \quad i = \overline{0, n}, \\ p_n > 0 &\Rightarrow \varepsilon_n \dot{\varepsilon}_n = -\varepsilon_n p_n \text{sign}(\varepsilon_n) = -p_n |\varepsilon_n| < 0. \end{aligned} \quad (14)$$

На основе неравенств (14) принимаются конкретные значения амплитуд. В процедурах, представленных в работах [6, 14, 15], выбор вторых параметров  $l_i > 0, i = \overline{0, n}$  не требует составления эталонного полинома, так как они назначаются на основе неравенств и обеспечивают заданную точность стабилизации ошибок наблюдения и их производных за заданное время. В данном асимптотическом подходе без учета времени переходного процесса конкретные параметры  $l_i > 0, i = \overline{0, n}$  последовательно определяются из равенств (12) при заданных коэффициентах эталонного полинома (5):

$$l_0 = a_0 / p_0, l_1 = a_1 / (p_1 p_0 l_0), l_2 = a_2 / (p_2 p_1 l_1 p_0 l_0), \dots, l_n = a_n / (p_n p_{n-1} l_{n-1} \dots p_1 l_1 p_0 l_0). \quad (15)$$

Таким образом, линейный наблюдатель (2), (4) и наблюдатель (2), (10) с настройкой (14), (15) будут порождать одинаковые процессы в установившихся режимах. Однако благодаря ограниченности кусочно-линейных корректирующих воздействий (10)  $|v_i(t)| \leq p_i, i = \overline{0, n}, t \geq 0$  следует ожидать

существенное снижение всплесков оценочных сигналов при смене формы дифференцируемого сигнала.

### 3. Результаты численного моделирования

Численное моделирование разработанных алгоритмов проводилось в среде MATLAB-Simulink. Для интегрирования дифференциальных уравнений использовался метод Эйлера с постоянным шагом 0,001. В качестве объекта дифференцирования рассматривался следующий составной сигнал:

$$y_0(t) = \begin{cases} 0.25t^2 - t + 2, & t \in [0; 4); \\ -2(t-5)^2 + 4, & t \in [4; 6); \\ 1 + \exp(-(t-6)), & t \geq 6. \end{cases} \quad (16)$$

Ставилась задача восстановить в реальном времени его первую и вторую производные. Для этих целей достаточно использовать наблюдатель (2) третьего порядка, но дифференцирование будет выполнено с некоторой точностью, так как составляющие сигнала (16) принадлежат выделенному в разделе 1 классу функций при  $\bar{n} = 3$ . Для асимптотически точного дифференцирования следует использовать наблюдатель (2) четвертого порядка. Для сравнения было проведено два численных эксперимента с наблюдателями третьего и четвертого порядков с одинаковым и достаточно большим запасом устойчивости эталонных полиномов  $\min\{-\operatorname{Re} \lambda_i\} = 20$  (5), обеспечивающим высокое быстродействие. В каждом эксперименте моделировались наблюдатели и с линейными (4), и с кусочно-непрерывными (10) корректирующими воздействиями с начальными значениями (9).

В эксперименте 1 с наблюдателями третьего порядка

$$\dot{z}_0 = z_1 + v_0, \quad \dot{z}_1 = z_2 + v_1, \quad \dot{z}_2 = v_2 \quad (17)$$

был принят следующий эталонный полином (5) и соответствующая линейная коррекция (4):

$$(\lambda + 20)^3 = \lambda^3 + 60\lambda^2 + 1200\lambda + 8000; v_0 = 60(y_0 - z_0), v_1 = 1200(y_0 - z_0), v_2 = 8000(y_0 - z_0). \quad (18)$$

Параметры кусочно-непрерывных корректирующих воздействий (10) были приняты на основе (14)–(15) в виде

$$p_0 = 30, l_0 = 2; p_1 = 10, l_1 = 2; p_2 = 6, l_2 = 1, 111. \quad (19)$$

На рис. 1–3 представлены графики сигнала  $y_0(t)$  (16), его двух производных  $y_1(t) = \dot{y}_0(t)$ ,  $y_2(t) = \ddot{y}_0(t)$  и их оценок  $z_i(t), i = 0, 1, 2$  (на нижних графиках), а также ошибок наблюдения  $\varepsilon_i(t) = y_i(t) - z_i(t)$  (на верхних графиках). В левой колонке представлены графики для наблюдателя (17) с кусочно-линейными корректирующими воздействиями с насыщением (10), (19); в правой – с линейными корректирующими воздействиями (18).

В таблице 1 для второго переходного процесса на интервале  $t \in [4; 6)$  показан ряд характеристик ошибок наблюдения  $\varepsilon_i, i = \overline{0, 2}$ : время регулирования  $t_i: |\varepsilon_i(t)| \leq 0,02, t \in [t_i; 6)$ ; точность в установившемся режиме  $\delta_i$  при  $t \rightarrow 6 - 0$  и величина перерегулирования  $\varepsilon_{\max, i} \geq |\varepsilon_i(t)|, t \in [4; 6)$ .

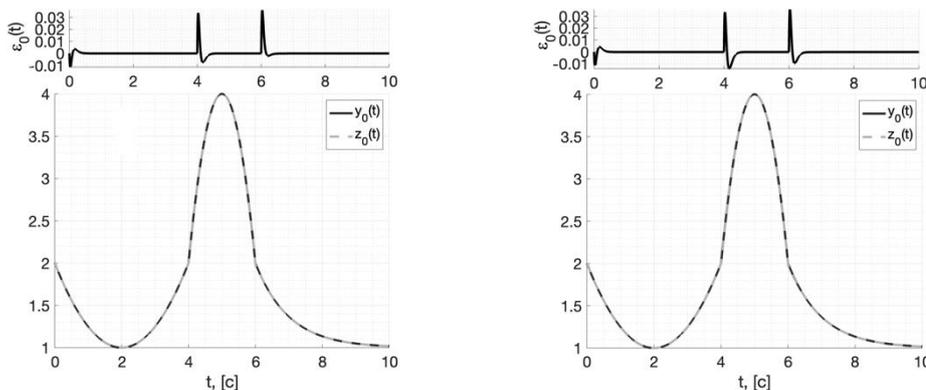


Рис. 1. Графики  $y_0(t), z_0(t), \varepsilon_0(t) = y_0(t) - z_0(t)$

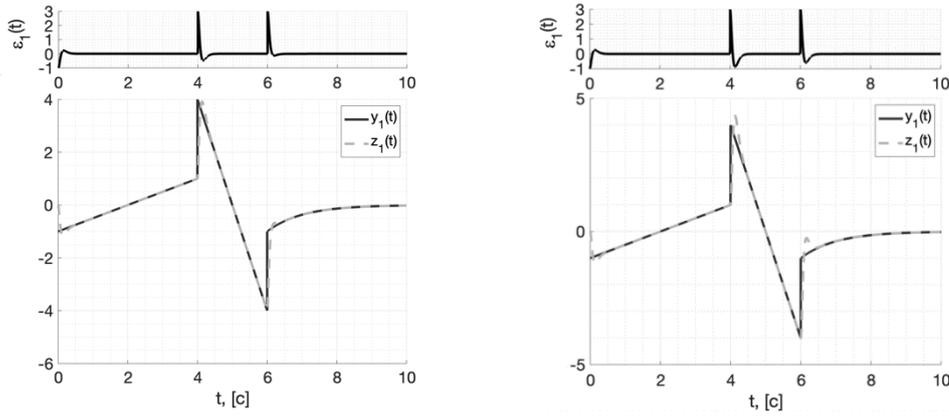


Рис. 2. Графики  $y_1(t)$ ,  $z_1(t)$ ,  $\varepsilon_1(t) = y_1(t) - z_1(t)$

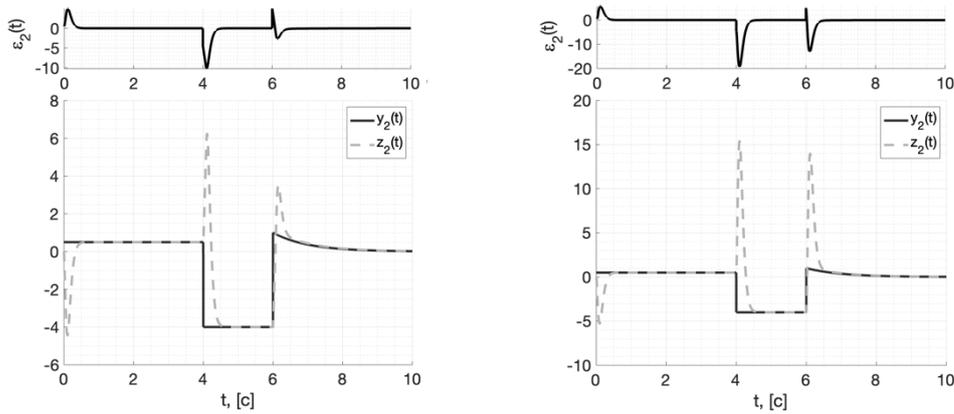


Рис. 3. Графики  $y_2(t)$ ,  $z_2(t)$ ,  $\varepsilon_2(t) = y_2(t) - z_2(t)$

Таблица 1. Значения показателей качества оценивания для наблюдателей третьего порядка (17)

Сигнал	Наблюдатель (17), (10), (19)			Линейный наблюдатель (10), (18)		
	$t_i, c$	$\delta_i$	$\varepsilon_{\max,i}$	$t_i, c$	$\delta_i$	$\varepsilon_{\max,i}$
$\varepsilon_0 = y_0 - z_0$	4,062	$10^{-8}$	0,0337	4,059	$10^{-8}$	0,0335
$\varepsilon_1 = y_1 - z_1$	4,442	$2 \cdot 10^{-7}$	3	4,474	$2 \cdot 10^{-7}$	3
$\varepsilon_2 = y_2 - z_2$	4,594	$1,37 \cdot 10^{-6}$	10,24	4,622	$1,37 \cdot 10^{-6}$	19,37

В эксперименте 2 с наблюдателями четвертого порядка

$$\dot{z}_0 = z_1 + v_0, \dot{z}_1 = z_2 + v_1, \dot{z}_2 = z_3 + v_2, \dot{z}_3 = v_4 \quad (20)$$

был принят следующий эталонный полином (5) и соответствующая линейная коррекция (4):

$$\begin{aligned} (\lambda + 20)^4 &= \lambda^4 + 80\lambda^3 + 2400\lambda^2 + 32000\lambda + 160000; \\ v_0 &= 80(y_0 - z_0), v_1 = 2400(y_0 - z_0), v_2 = 32000(y_0 - z_0), v_3 = 160000(y_0 - z_0). \end{aligned} \quad (21)$$

Параметры кусочно-непрерывных корректирующих воздействий (10) были приняты на основе (14)–(15) в виде

$$p_0 = 40, l_0 = 2; p_1 = 15, l_1 = 2; p_2 = 8, l_2 = 1,666, p_3 = 2,5, l_3 = 2. \quad (22)$$

На рис. 4–7 представлены графики сигнала  $y_0(t)$  (16), его трех производных  $y_1(t) = \dot{y}_0(t)$ ,  $y_2(t) = \ddot{y}_0(t)$ ,  $y_3(t) = \dddot{y}_0(t)$  и их оценок  $z_i(t)$ ,  $i = \overline{0,3}$  (на нижних графиках), а также ошибок наблюдения  $\varepsilon_i(t) = y_i(t) - z_i(t)$  (на верхних графиках). В левой колонке представлены графики для наблюдателя (20) с кусочно-линейными корректирующими воздействиями с насыщением (10), (22); в правой – с линейными корректирующими воздействиями (21).

В таблице 2 для второго переходного процесса на интервале  $t \in [4; 6)$  представлены следующие характеристики ошибок наблюдения  $\varepsilon_i, i = \overline{0, 3}$ : время регулирования  $t_i: |\varepsilon_i(t)| \leq 0,02, t \in [t_i; 6)$ ; точность в установившемся режиме  $\delta_i$  при  $t \rightarrow 6 - 0$  и величина перерегулирования  $\varepsilon_{\max, i} \geq |\varepsilon_i(t)|, t \in [4; 6)$ .

Как видим, результаты моделирования подтверждают обоснованность и эффективность используемого метода для выделенного класса систем.

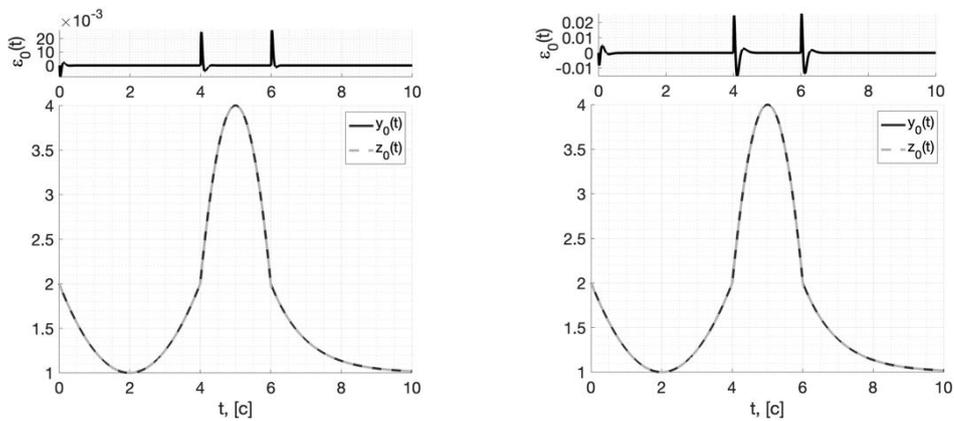


Рис. 4. Графики  $y_0(t), z_0(t), \varepsilon_0(t) = y_0(t) - z_0(t)$

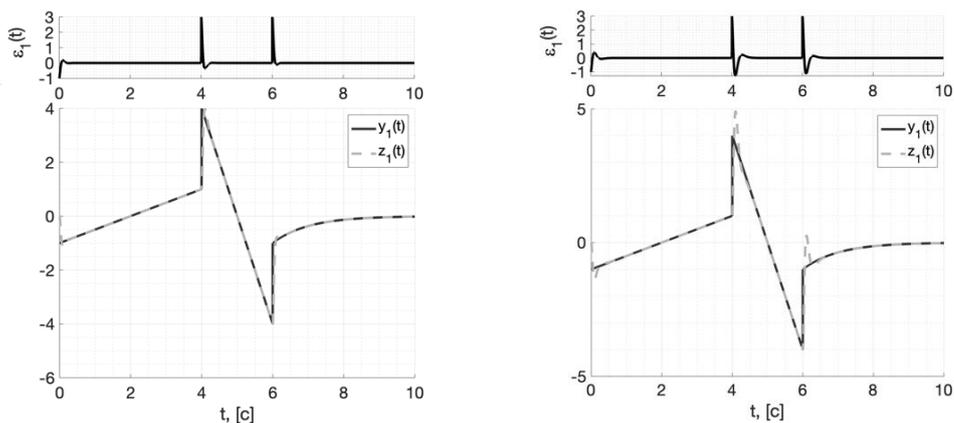


Рис. 5. Графики  $y_1(t), z_1(t), \varepsilon_1(t) = y_1(t) - z_1(t)$

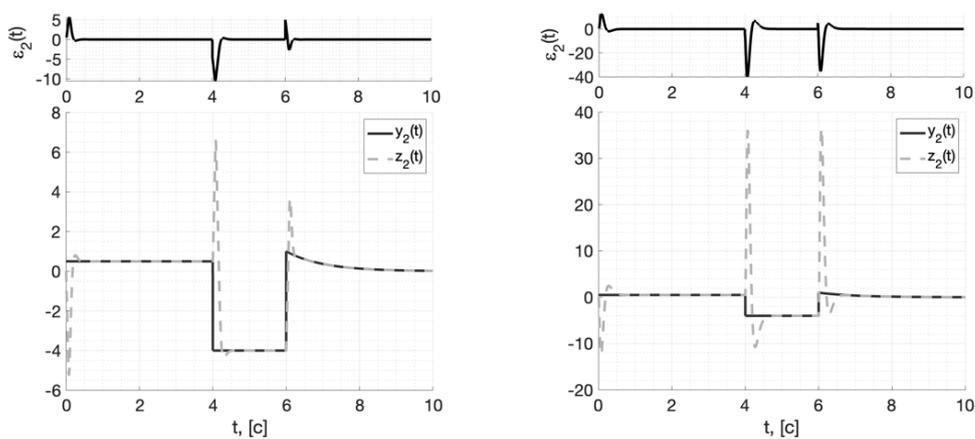


Рис. 6. Графики  $y_2(t), z_2(t), \varepsilon_2(t) = y_2(t) - z_2(t)$

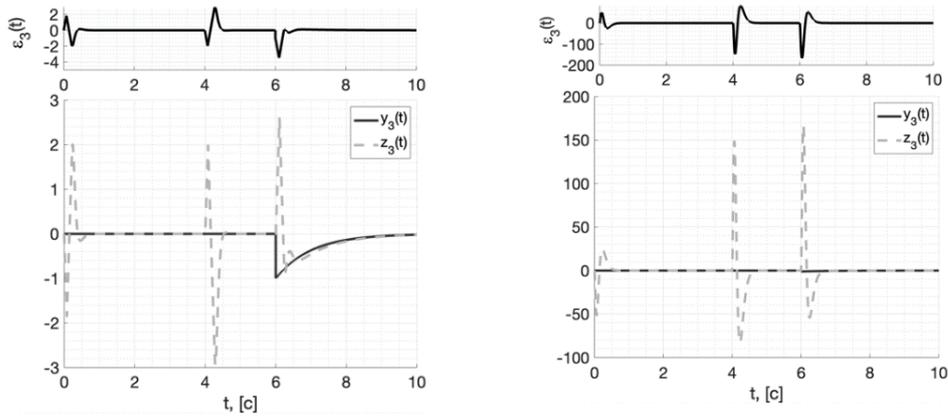


Рис. 7. Графики  $y_3(t)$ ,  $z_3(t)$ ,  $\varepsilon_3(t) = y_3(t) - z_3(t)$

Таблица 2. Значения показателей качества оценивания для наблюдателей четвертого порядка (20)

Сигнал	Наблюдатель (20), (10), (22)			Линейный наблюдатель (20), (21)		
	$t_i, c$	$\delta_i$	$\varepsilon_{\max,i}$	$t_i, c$	$\delta_i$	$\varepsilon_{\max,i}$
$\varepsilon_0 = y_0 - z_0$	4,03	$1,37 \cdot 10^{-8}$	0,025	4,03	$1,37 \cdot 10^{-8}$	0,025
$\varepsilon_1 = y_1 - z_1$	4,247	$4,13 \cdot 10^{-7}$	3	4,553	$4,13 \cdot 10^{-7}$	3
$\varepsilon_2 = y_2 - z_2$	4,491	$5,5 \cdot 10^{-6}$	10,57	4,764	$5,5 \cdot 10^{-6}$	40
$\varepsilon_3 = y_3 - z_3$	4,672	$3,5 \cdot 10^{-6}$	2,937	4,893	$27,7 \cdot 10^{-6}$	148,4

## Литература

1. Бусурин В.И., Коробков К.А., Зо Л.Х. Компенсационный микроэлектромеханический преобразователь ускорения с пьезоэлектрическим чувствительным элементом и оптическим считыванием // Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. 2024. Т. 27. N 1. – С. 79–89.
2. Емельянов С.В., Афанасьев А.П. Дифференцирование сигнала в системах автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. 2015. N 12. – С. 27–42.
3. Уонем У.М. Линейные многомерные системы. Геометрический подход. – М.: Наука, 1980. – 375 с.
4. Фомичев В.В., Высоцкий А.О. Алгоритм построения каскадного асимптотического наблюдателя для системы с максимальным относительным порядком // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. N 4. – С. 567–573.
5. Дылевский А.В., Лозгачев Г.И. Применение метода пространства состояний для синтеза дифференциаторов // Автоматика и телемеханика. 1999. N 9. – С. 13–20.
6. Кокушко Ю.Г., Краснова С.А., Уткин В.А. Каскадный синтез дифференциаторов с кусочно-линейными корректирующими воздействиями // Автоматика и телемеханика. 2021. N 7. – С. 37–68.
7. Коровин С.К., Фомичев В.В. Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 224 с.
8. Khalil H.K. Cascade high-gain observers in output feedback control // Automatica. – June 2017. – Vol. 80. – P. 110–118.
9. Wang H., Zhang Z., Tang X., Zhao Z., Yan Y. Continuous output feedback sliding mode control for underactuated flexible-joint robot // Journal of the Franklin Institute. – 2022. Vol. 359. – P. 7847–7865.
10. Краснова С.А., Уткин В.А., Михеев Ю.В. Каскадный синтез наблюдателей состояния нелинейных многомерных систем // Автоматика и телемеханика. 2001. N 2. С. 43–64.
11. Levant A., Livne M., Yu X. Sliding-Mode-Based Differentiation and Its Application // IFAC PapersOnLine. – 2017. – Vol. 50, Iss. 1. – P. 1699–1704.
12. Utkin V.I., Poznyak A.S., Orlov Yu.V., Polyakov A. Road Map for Sliding Mode Control Design. – Springer International Publishing, 2020. – 127 p.
13. Bautista G.D., Perez J., Milanés V., Nashashibi F. A review of motion planning techniques for automated vehicles // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. – 2015. Vol. 17, N 4. – P. 1–11.
14. Краснов Д.В., Уткин А.В. Синтез многофункциональной системы слежения в условиях неопределенности // Управление большими системами. 2017. Выпуск 69. – С. 29–49.
15. Краснова С.А. Оценивание производных внешних возмущений на основе виртуальных динамических моделей // Управление большими системами. 2018. вып. 76. – С. 6–25.
16. Краснова С.А., Уткин А.В. Сигма-функция в задачах синтеза наблюдателей состояний и возмущений // Проблемы управления. 2015. N 5. – С. 27–36.