МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОЙ КОМПЕНСАЦИИ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ[1]

Кочетков С.А., Уткин В.А.
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
kos@ipu.ru, vicutkin@ipu.ru

Аннотация. Рассмотрены проблемы компенсации возмущений заданного класса на основе метода динамической компенсации в рамках методов синтеза систем с разделяемыми движениями на основе использования глубоких обратных связей и разрывных управляющих воздействий, позволяющего осуществить многократную декомпозицию задач синтеза систем управления на независимо решаемые подзадачи меньшей размерности. Дается расширение известных результатов на случай нелинейных систем управления и неопределенных моделей генератора возмущений.

Ключевые слова: динамический компенсатор, скользящие режимы, внешние возмущения, декомпозиция.

Введение

В данной работе вводится понятие метода синтеза систем с разделяемыми движениями на основе использования глубоких обратных связей и разрывных управляющих воздействий, позволяющего осуществить многократную декомпозицию задач синтеза систем управления на независимо решаемые подзадачи меньшей размерности.

В случае если возмущающие воздействия удается удовлетворительно описать динамической моделью с известными параметрами и неизвестными начальными условиями, инвариантность обеспечивается на основе метода динамической компенсации [1, 2] и/или асимптотических наблюдателей [3]. Суть данного подхода заключается во введении в контур обратной связи динамического звена, имеющего структуру модели возмущений, с последующим синтезом задачи стабилизации в расширенном пространстве состояний [3]. В разделе 1 приведены основные результаты в теории динамической компенсации возмущений в задаче стабилизации – в подразделе 1.1 с использованием наблюдателя возмущений, а в подразделе 1.2 с использованием динамического компенсатора. Отмечаются трудности реализации метода динамической компенсации, связанные с высокой размерностью задачи и не грубостью к параметрическим неопределенностям.

Эти трудности в какой-то степени удается преодолеть в рамках методов систем с разделяемыми движениями, изложенными в разделе 2, позволяющим декомпозировать задачи синтеза высокой размерности на независимо решаемые подзадачи синтеза собственно объекта управления и выбора динамического компенсатора [4]. Предложены подходы к решению задач динамической компенсации возмущений применительно к нелинейным системам (подраздел 2.1), для случая нестационарной модели возмущений с неизвестными параметрами (подраздел 2.2) и в случае несогласованных возмущений (подраздел 2.3).

В разделе 3 рассмотрена задача управления по высоте БПЛА с подвешенным грузом на пружинной связи.

1. Классические результаты

Рассматривается задача обеспечения инвариантности относительно вектора выходных переменных в классе линейных многомерных стационарных систем вида

$$\dot{x} = Ax + Bu + Q\eta,\ y = Dx, \tag{1}$$

в предположении, что возмущающие воздействия η недоступны для измерения и порождаются динамической моделью с неизвестными начальными условиями

$$\begin{aligned} &\dot{\omega} = W\omega,\ \eta = H\omega, \\ &\omega \in R^r, \dim W = (r \times r),\ \dim H = (l \times r), \end{aligned} \tag{2}$$

где $x \in R^n$, $u \in R^m$, $y \in R^p, \eta \in R^l$.

Основная идея метода динамической компенсации заключается во введении в замкнутый контур системы управления динамического звена, имеющего структуру модели возмущений. Если в такой системе подогнать начальные условия динамического компенсатора и модели возмущений, то

[1] *Работа выполнена при частичной поддержке Российского Научного Фонда, проект №24–21–20009.*

появляется возможность компенсировать воздействие возмущений с помощью выходного сигнала компенсатора. Таким образом, задача обеспечения инвариантности сводится к задаче стабилизации расширенной системы, включающей модель объекта управления (1) и динамический компенсатор возмущений. Отметим, что полная инвариантность в системе (1) достигается лишь после совпадения выходных сигналов модели возмущений и динамического компенсатора и, поскольку в линейных системах эти сигналы сходятся асимптотически, такую инвариантность будем называть асимптотической.

Классический метод динамической компенсации для систем (1), (2) развит в предположении, что возмущающие воздействия действуют на вход системы, т. е. выполнено условие:

$$\operatorname{Im} Q \subset \operatorname{Im} B \Rightarrow \exists \Lambda : Q = B\Lambda,\ \dim \Lambda = (m \times l).$$

В этом случае система (1) принимает вид

$$\dot{x} = Ax + B(u + \Lambda\eta),\ \ y = Dx\,. \tag{3}$$

В системе (3) выполняются условия инвариантности относительно всего вектора состояний и, следовательно, задача стабилизации вектора состояний имеет решение, что решает и задачу стабилизации выходных переменных. Вообще говоря, задача стабилизации систем (2), (3), в предположении, что вектор состояний доступен для измерения, может быть решена как с использованием теории асимптотических наблюдателей состояния, так и на основе методов теории динамической компенсации. В первом случае ставится задача наблюдения вектора состояний модели возмущений, и далее используются их оценки в комбинированном управлении, в то время, как во втором - динамический компенсатор непосредственно не дает оценки вектора состояний модели возмущений, а решается задача стабилизации расширенной системы. Для иллюстрации указанных особенностей приведем два подхода к синтезу задачи инвариантности систем (2), (3). Хотя два первых из приводимых ниже алгоритма строятся с позиции метода динамической компенсации, легко видеть, что первый из них весьма сходен с методами теории асимптотических наблюдателей. Обобщение метода динамической компенсации возмущений на общий случай линейных систем приведен в третьем пункте данного параграфа. Последний, четвертый алгоритм решает задачу динамической компенсации для случая, когда модель возмущений не стационарна и ее параметры не известны [5].

1.1. Наблюдатель с непосредственной оценкой вектора модели возмущений

Опишем динамический компенсатор уравнениями

$$\dot{z} = (W + LB\Lambda H)z + (LA - WL - LB\Lambda H)x + LBu, \tag{4}$$

где $z \in R^r$ и заметим, что вектор состояния этого динамического компенсатора может служить оценкой переменной $\overline{\eta} = \omega + Lx$, описываемой в силу (2), (3), уравнениями

$$\dot{\overline{\eta}} = (W + LB\Lambda H)\overline{\eta} + (LA - WL - LB\Lambda H)x + LBu.$$

Действительно, уравнение в невязках $\varepsilon = \overline{\eta} - z$ имеет вид $\dot{\varepsilon} = (W + LB\Lambda H)\varepsilon$, и, без ограничения общности полагая пару матриц $(W, B\Lambda H)$ наблюдаемой, заданием матрицы L можно решить задачу стабилизации переменных $\varepsilon \to 0$. Тогда выбор управляющих воздействий в виде комбинированного управления $u = Fx - \Lambda H(z - Lx)$, в предположении управляемости исходной системы, решает задачу стабилизации вектора состояний системы (3) соответствующим выбором матрицы обратной связи F : $\dot{x} = (A + BF)x + B\Lambda H\varepsilon$.

Порядок предложенного динамического компенсатора равен порядку модели возмущающих воздействий, но при этом решение задачи компенсации возмущений существенно зависит от параметров объекта управления.

1.2. Метод динамической компенсации

С помощью не особой заменой переменных система (1)–(2) приводится к регулярной форме управляемости [4]:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2\,,\\
\dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u + Q_2\omega,\\
\dot{\omega} &= W\omega,
\end{aligned} \tag{5}$$

где $x_1 \in R^{n-m}$, $x_2 \in R^m$, $\mathrm{rank} B_2 = m$.

Сформируем динамический компенсатор в виде

$$\dot{z} = Wz - v,\ v, z \in R^r \tag{6}$$

и, выбирая управления в виде

$$u = -B_2^{-1} Q_2 z + \bar{u}, \tag{7}$$

запишем систему (5) – (6) относительно переменных $x_1, x_2, \varepsilon = \omega - z$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2\bar{u} + Q_2\varepsilon, \\ \dot{\varepsilon} &= W\varepsilon + v, \end{aligned} \tag{8}$$

Введем замену переменных $\bar{\varepsilon} = \varepsilon + Lx_2$. Тогда уравнение (8) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + (A_{22} - Q_2L)x_2 + B_2\bar{u} + Q_2\bar{\varepsilon}, \\ \dot{\bar{\varepsilon}} &= (W + LQ_2)\bar{\varepsilon} - WLx_2 + LA_{12}x_1 + L(A_{22} - Q_2L)x_2 + LB_2\bar{u} + v, \end{aligned}$$

Выбирая управления динамического компенсатора и объекта управления как

$$\begin{aligned} v &= -L(F_1x_1 + F_2x_2) + WLx_2, \\ \bar{u} &= -B_2^{-1}(A_{21}x_1 + (A_{22} - Q_2L)x_2 - F_1x_1 - F_2x_2), \end{aligned} \tag{9}$$

получаем замкнутую систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 &= F_1x_1 + F_2x_2 + Q_2\bar{\varepsilon}, \\ \dot{\bar{\varepsilon}} &= (W + LQ_2)\bar{\varepsilon} \end{aligned} \tag{10}$$

и, в силу управляемости и наблюдаемости исходной системы, соответствующим выбором матриц F_1, F_2, L решается задача назначения желаемого спектра системы (10). Отметим, что и в приведенном алгоритме также используется динамический компенсатор размерности модели возмущений и решение задачи инвариантности является не грубым к неопределенностям параметров объекта управления.

2. Метод разделения движений

2.1. Метод динамической компенсации в нелинейных системах

Рассмотрим нелинейную систему вида

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x) + B(x)u + Q(x)\eta,\ \dot{\omega} = W\omega,\ \eta = H\omega \\ &x \in R^n, u \in R^m, \eta \in R^r, f(0) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Пусть, по-прежнему, выполняется условие инвариантности всего вектора состояний системы (11): $\mathrm{Im}\, Q(x) \subset \mathrm{Im}\, B(x), \forall x \Rightarrow \exists \Lambda(x) : Q(x) = B(x)\Lambda(x)$ и представим систему (11) в регулярной форме управляемости [5]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + B_2(x_1, x_2)[u + \Lambda_2(x_1, x_2)\omega], \end{aligned} \tag{12}$$

где $x_1 \in R^{n-m}, x_2 \in R^m, u \in R^m, \det B_2 \neq 0$.

Следуя блочному подходу [6], на первом шаге введем замену переменных $\bar{x}_2 = x_2 - \varphi(x_1)$ таким образом, чтобы в преобразованной системе

$$\dot{x}_1 = f_1[x_1, \bar{x}_2 + \varphi(\mathrm{x}_1)],$$
$$\dot{\bar{x}}_2 = f_2(\cdot) + B_2(\cdot)[u + \Lambda_2(\cdot)\omega] - \frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_1}\dot{x}_1 \tag{13}$$

в первой подсистеме выбором $\varphi(\mathrm{x}_1)$ обеспечивалась ее стабилизация $x_1 \to 0$ в предположении $\bar{x}_2 = 0$.

На втором шаге следует решить задачу стабилизации второй подсистемы (13) выбором управления в виде

$$B_2(\cdot)u = F_2\bar{x}_2 - \Lambda_2(\cdot)z_2 - f_2(\cdot) - \frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_1}\dot{x}_1, \tag{14}$$

где

$$\dot{z}_2 = Wz_2 + v_2,\ v_2, z_2 \in R^r \tag{15}$$

Вторая подсистема (13), замкнута обратной связью (14) с учетом (15) в переменных $\bar{x}_2, \varepsilon_2 = \omega - z_2 + L_2\bar{x}_2$ примет вид

$$\dot{\bar{x}}_2 = F_2\bar{x}_2 + B_2(.)[\Lambda_2(.)\varepsilon_2],$$
$$\dot{\varepsilon}_2 = W\varepsilon_2 + L_2\{\mathrm{F}_2\bar{x}_2 + B_2(.)[\Lambda_2(.)\varepsilon_2]\} + v_2. \tag{16}$$

И, наконец, выбирая управления $v_2 = -L_2\mathrm{F}_2\bar{x}_2$ и матрицу $\mathrm{L}_2 = \mathrm{B}_2^{-1}(.)\mathrm{L}_{20}$ окончательно имеем

$$\dot{\bar{x}}_2 = F_2\bar{x}_2 + B_2(.)\Lambda_2(.)\varepsilon_2, \dot{\varepsilon}_2 = [W + L_{20}\Lambda_2(.)]\varepsilon_2. \tag{17}$$

Выбор матрицы L_{20} осуществляется таким образом, чтобы обеспечить стабилизацию второй полсистемы (17). Матрица F_2 выбирается гурвицевой, что позволяет решить задачу стабилизации системы (17) последовательно снизу вверх.

Таким образом, задача обеспечения инвариантности в системе (11) высокой размерности свелась к независимому последовательному решению подзадач меньшей размерности, а именно, стабилизация первой подсистемы (12), второй и первой подсистем (17).

Использование методов систем с разделяемыми движениями со скользящими режимами и глубокими обратными связями позволяет также декомпозировать решение задачи стабилизации системы (11) и при этом задача стабилизации подсистемы (17) решается на модальном уровне.

Приведем решение задачи стабилизации системы (11) с использованием теории скользящих режимов.

Применительно ко второй подсистеме (13) сформируем управления в виде $u = v - \Lambda_2(.)\bar{z}_2$, $v = -M(x)\mathrm{sign}\,\bar{x}_2$, переменные $\bar{z}_2$ суть вектор состояний динамического компенсатора

$$\dot{\bar{z}}_2 = W\bar{z}_2 + Lv,\ \bar{z}_2 \in R^r \tag{18}$$

В переменных $\bar{x}_2, \bar{\varepsilon}_2 = \omega - \bar{z}_2 + L_2\bar{x}_2$ последнее уравнение (13) с учетом (18) описывается системой уравнений

$$\dot{\bar{x}}_2 = f_2(\cdot) + B_2(\cdot)[u + \Lambda_2(\cdot)\bar{\varepsilon}_2] - \frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_1}\dot{x}_1,$$
$$\dot{\bar{\varepsilon}}_2 = W\bar{\varepsilon}_2 + Lv. \tag{19}$$

Тогда, при достаточно больших величинах переменной амплитуды разрывных управления возникают скользящие движения вдоль некоторого многообразия $\bar{x}_2 = x_2 - \varphi(x_1) = 0$ и выбором вектор-функции $\varphi(x_1)$ решается задача стабилизации первой подсистемы (12). Эквивалентное значение управлений в точке равновесия системы $x_1 = x_2 = 0$ равно $v_{eq} = -\Lambda(0,0)\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{\varepsilon}_2 = \omega - \bar{z}_2$. Полагая, без ограничения общности, пару матриц $(\Lambda(0), W)$ наблюдаемой, выбором матрицы L обеспечивается стабилизация второй подсистемы (19): $\dot{\bar{\varepsilon}}_2 = (W + L\Lambda(0))\bar{\varepsilon}_2$.

2.2. Случай нестационарной модели возмущений с неизвестными параметрами

Рассмотрим частный случай системы (1) со скалярным входом в предположении, что модель возмущающих воздействий удовлетворяет линейным нестационарным динамическим уравнениям с известными диапазонами изменений их параметров:

$$\dot{x} = Ax + b(u + q\omega)\,, \tag{20}$$

где $x \in R^n,\ u,\ \omega, y \in R^1$ и возмущение порождается динамической моделью вида

$$L(s)\omega = 0,\ L(s) = s^{\rho} + \textstyle\sum_{i=0}^{\rho-1} g_i(t) s^{(i)}, \tag{21}$$

где s – оператор дифференцирования, $|g(t)| \le k_i = \mathrm{const}$.

Пусть возмущения воздействуют на входы объекта управления. Тогда система (20) приводится к блочной форме управляемости, аналогичной (8):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}^{\mathrm{T}}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u + q_2\omega. \end{aligned} \tag{22}$$

Следующая процедура дает решения задачи динамической компенсации возмущений в системе (21), (22).

Из предположения об управляемости исходной системы следует управляемость пары (A_{11}, a_{12}). Следовательно, система (22) неособой заменой переменных $\bar{x}_2 = x_2 - f_1^{\mathrm{T}}x_1$ сводится к системе вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (A_{11} + a_{12}f_1^{\mathrm{T}})x_1 + a_{12}\bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{a}_{21}^{\mathrm{T}}x_1 + \bar{a}_{22}x_2 + b_2u + q_2\omega, \end{aligned} \tag{23}$$

причем собственные движения первой подсистемы выбором вектор строки f_1^{T} назначаются произвольным образом и, следовательно, задача стабилизации системы (23) сводится к стабилизации второй подсистемы.

Если выбрать управления в виде $\mathrm{b}_2u = -\bar{a}_{21}^{\mathrm{T}}x_1 - \bar{a}_{22}\bar{x}_2 + \bar{u}$ то вторая подсистема (23) примет вид:

$$\dot{\bar{x}}_2 = \bar{u} + q_2\omega \tag{24}$$

Таким образом, исходная задача свелась к задаче динамической компенсации возмущений в системе (24) с учетом (21).

Для ее решения положим $\bar{u} = z$, где z является вектором состояний динамического компенсатора вида

$$\begin{aligned} &L_c(s)z = -\nu, \\ &L_c(s) = s^{\rho} + \textstyle\sum_{i=0}^{\rho-1} d_i s^{(i)},\ d_i = \mathrm{const}. \end{aligned} \tag{25}$$

Расширим пространство переменных системы (25) за счет введения координат

$$\begin{aligned} \bar{x}_3 &= z + q_2\omega, \\ \bar{x}_4 &= \dot{z} + q_2\dot{\omega}, \\ &\ldots \\ \bar{x}_{\rho+2} &= z^{(\rho-1)} + q_2\omega^{(\rho-1)}. \end{aligned} \tag{26}$$

Расширенная система (24) с учетом (26) принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_i &= \bar{x}_{i+1},\ i = \overline{2, \rho+1} \\ \dot{\bar{x}}_{\rho+2} &= \sum_{i=0}^{\rho-1}[d_i - g_i(t)]z^{(i)} + \sum_{i=0}^{\rho-1}\bar{x}_{i+3} + \nu, \end{aligned} \tag{27}$$

где выражение в правой части последнего уравнения получено из соотношений (21) и (26) после подстановки выражений $q_2\omega^{(i)} = \bar{x}_{\,i+3} - z^{(i)}, i = \overline{0, \rho-1}$, получаемых из уравнений (26).

Задача стабилизации системы (26), в силу ограниченности коэффициентов $|g_i(t)| \le k_i$, может быть решена в рамках систем с разрывными управлениями

$$v = -M\mathrm{sign}(s) \qquad (28)$$

за счет организации скользящего режима по плоскости скольжения

$$s = \bar{x}_{\rho+2} + \sum_{i=2}^{\rho+1} C_i \bar{x}_i = 0$$

описываемого уравнениями метода эквивалентного управления

$$\dot{\bar{x}}_i = \bar{x}_{i+1},\ \dot{\bar{x}}_{\rho+1} = \sum_{i=2}^{\rho+1} C_i \bar{x}_i.$$

которые определяются выбором коэффициентов C_i и инвариантны к возмущениям. Существенно для практики, что амплитуды разрывных управлений, в силу того, что условий существования скользящих режимов имеют форму неравенств, являются ограниченными величинами. В тоже время, использование систем с глубокими обратными связями для организации медленных движений по заданному многообразию в решении этой задачи с неизбежностью потребует бесконечных коэффициентов усиления в цепи обратной связи.

Предложенная схема построения инвариантных систем, за счет использования канонического представления и методов теории скользящих режимов, позволяет обеспечить свойства грубости систем как к параметрам модели объекта управления, так и к описанию модели возмущающих воздействий.

Отметим, что для реализации алгоритма управления на скользящих режимах (28) требуется найти производные от переменной (24) высокого порядка.

3. Приложение к управлению БПЛА

Рассмотрим результаты моделирования синтезированного закона управления для движения летательного аппарата с подвешенным на пружине грузом в вертикальной плоскости (см. рис. 1).

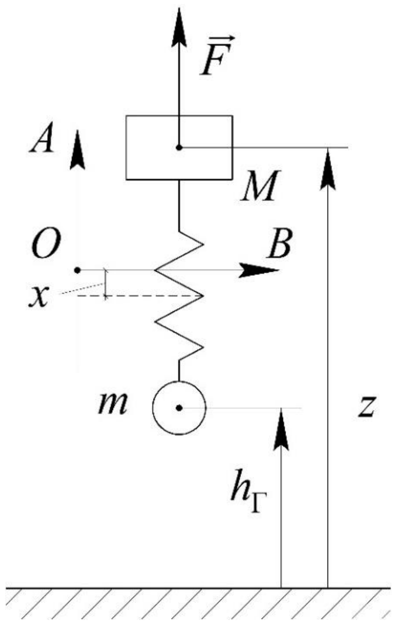

Рис. 1. Схема объекта управления

Математическая модель объекта записывается в виде

$$
\begin{aligned}
&\dot{z} = \upsilon_z, \\
&\dot{\upsilon}_z = \frac{k}{M}x + \frac{\alpha_s}{M}\upsilon_x - g - \frac{\alpha_c}{M}\upsilon_z + \frac{F}{M}, \\
&\dot{x} = \upsilon_x, \\
&\dot{\upsilon}_x = -\frac{k(m+M)}{Mm}x - \frac{\alpha_s(m+M)}{Mm}\upsilon_x + \frac{\alpha_c}{M}\upsilon_z - \frac{F}{M},
\end{aligned} \tag{29}
$$

где z, υ_z – координата центра масс летательного аппарата и его скорость, x, υ_x – деформация пружины и скорость изменения деформации пружины, OB – линия нулевой деформации пружины, OA – направление положительной деформации пружины, α_c – коэффициент вязкого трения среды для летательного аппарата, α_s – коэффициент, учитывающий влияние потерь в пружине и сопротивление движению подвешенного тела, m, M – массы подвешенного тела и летательного аппарата соответственно, k – жесткость пружины, $h_Г = z - c + x$ – высота подвешенного груза над поверхностью земли, c – расстояние от центра масс летательного аппарата до центра масс подвешенного груза при отсутствии деформации в пружине, F – модуль вектора тяговой силы в вертикальном направлении.

Ставится задача стабилизации положения летательного аппарата на заданной постоянной высоте (задача регулирования)

$$
\lim_{t\to\infty} |z(t) - z_{\mathrm{d}}| = \lim_{t\to\infty} |\bar{z}(t)| = 0,\ \bar{z}(t) = z(t) - z_{\mathrm{d}},\ z_{\mathrm{d}} = \mathrm{const} > 0 \tag{30}
$$

в предположении, что измерению доступны только положение и скорость летательного аппарата.

С помощью замены координат

$$
\begin{pmatrix} z \\ \upsilon_z \\ y \\ \upsilon_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \upsilon_z \\ x \\ \upsilon_x \end{pmatrix}
$$

преобразуем систему (29) к следующему виду

$$
\begin{aligned}
&\dot{z} = \upsilon_z, \\
&\dot{\upsilon}_z = -\frac{k}{M}z - \frac{\alpha_s + \alpha_c}{M}\upsilon_z + \frac{k}{M}y + \frac{\alpha_s}{M}\upsilon_y - g + \frac{F}{M}, \\
&\dot{y} = \upsilon_y, \\
&\dot{\upsilon}_y = \frac{k}{m}z + \frac{\alpha_s}{m}\upsilon_z - \frac{k}{m}y - \frac{\alpha_s}{m}\upsilon_y - g.
\end{aligned}
$$

Эти уравнения с учетом (30) могут быть представлены в форме

$$
\begin{aligned}
&\dot{\bar{z}} = \upsilon_z, \\
&\dot{\upsilon}_z = -\frac{k}{M}\bar{z} - \frac{\alpha_s + \alpha_c}{M}\upsilon_z + \frac{k}{M}y + \frac{\alpha_s}{M}\upsilon_y - g - \frac{k}{M}z_{\mathrm{d}} + \frac{F}{M}, \\
&\dot{y} = \upsilon_y, \\
&\dot{\upsilon}_y = \frac{k}{m}\bar{z} + \frac{\alpha_s}{m}\upsilon_z - \frac{k}{m}y - \frac{\alpha_s}{m}\upsilon_y - g + \frac{k}{m}z_{\mathrm{d}}.
\end{aligned} \tag{31}
$$

В рамках предлагаемого подхода неизмеряемые переменные состояния y, υ_y могут трактоваться как возмущения. Учитывая, что во втором и четвертом уравнении системы действуют постоянные слагаемые $-g - \frac{k}{M}z_{\mathrm{d}}$ и $-g + \frac{k}{m}z_{\mathrm{d}}$ полная модель возмущений согласно (31) может быть представлена как

$$
\dot{\omega} = W\omega + B_e e, \tag{32}
$$

где $\omega=(\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4)^{\mathrm{T}}=(g \quad z_{\mathrm{d}} \quad y \quad \upsilon_y)^{\mathrm{T}}$, $W=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & \dfrac{k}{m} & -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{\alpha_s}{m} \end{pmatrix}$, $e=(\bar{z} \quad \upsilon_z)^{\mathrm{T}}$,

$B_e=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dfrac{k}{m} & \dfrac{\alpha_s}{m} \end{pmatrix}$.

С учетом (31)–(32) математическая модель системы может быть записана в виде подобном (5)

$$\begin{aligned} &\dot{\bar{z}}=\upsilon_z, \\ &\dot{\upsilon}_z=-\frac{k}{M}\bar{z}-\frac{\alpha_s+\alpha_c}{M}\upsilon_z+Q\omega+\frac{F}{M}, \\ &\dot{\omega}=W\omega+B_e e, \end{aligned} \tag{33}$$

где $Q=\begin{pmatrix} -1 & -\dfrac{k}{M} & \dfrac{k}{M} & \dfrac{\alpha_s}{M} \end{pmatrix}$.

Отличием системы (33) от представления (5) является то, что подсистема для возмущений неавтономна (присутствуют слагаемые $B_\omega e$, ξ). Однако, как будет показано далее, это не меняет предлагаемого подхода к синтезу обратной связи.

Непосредственной проверкой с помощью линейных преобразований может быть показано, что пара (W,Q) ненаблюдаема, т.к.

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} Q \\ QW \\ QW^2 \\ QW^3 \end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} -1 & -\dfrac{k}{M} & \dfrac{k}{M} & \dfrac{\alpha_s}{M} \\ -\dfrac{\alpha_s}{M} & \dfrac{\alpha_s k}{Mm} & -\dfrac{\alpha_s k}{Mm} & \dfrac{-\alpha_s^2+km}{Mm} \\ \dfrac{\alpha_s^2-km}{Mm} & \dfrac{k(-\alpha_s^2+km)}{Mm^2} & \dfrac{k(\alpha_s^2-km)}{Mm^2} & \dfrac{\alpha_s(\alpha_s^2-2km)}{Mm^2} \\ \dfrac{\alpha_s(-\alpha_s^2+2km)}{Mm^2} & \dfrac{\alpha_s k(\alpha_s^2-2km)}{Mm^3} & \dfrac{\alpha_s k(-\alpha_s^2+2km)}{Mm^3} & \dfrac{(-\alpha_s^4+3\alpha_s^2 km-k^2m^2)}{Mm^3} \end{pmatrix}=$$

$$=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} -1 & -\dfrac{k}{M} & \dfrac{k}{M} & \dfrac{\alpha_s}{M} \\ -\dfrac{\alpha_s}{M} & \dfrac{\alpha_s k}{Mm} & -\dfrac{\alpha_s k}{Mm} & \dfrac{-\alpha_s^2+km}{Mm} \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{k^2m}{M(\alpha_s^2-km)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} -1 & -\dfrac{k}{M} & \dfrac{k}{M} & \dfrac{\alpha_s}{M} \\ 0 & \dfrac{\alpha_s k(M+m)}{M^2m} & -\dfrac{\alpha_s k(M+m)}{M^2m} & -\dfrac{\alpha_s^2(M+m)}{M^2m}+\dfrac{k}{M} \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{k^2m}{M(\alpha_s^2-km)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=3$$

Система (33) с помощью замены переменных

$$\xi=H\omega,\ H=\begin{pmatrix} Q \\ QW \\ QW^2 \\ H_4 \end{pmatrix},\ H_4=(0 \quad 1 \quad 0 \quad 0),\ \xi=(\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3 \quad \xi_4)^{\mathrm{T}}$$

преобразуется к представлению

$$\begin{aligned} &\dot{\bar{z}}=\upsilon_z, \\ &\dot{\upsilon}_z=-\frac{k}{M}\bar{z}-\frac{\alpha_s+\alpha_c}{M}\upsilon_z+\xi_1+\frac{F}{M}, \\ &\dot{\xi}=\widetilde{W}\xi+\widetilde{B}_e e, \end{aligned} \tag{34}$$

где $\widetilde{W} = HWH^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{\alpha_s}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\widetilde{B}_e = HB_e = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha_s k}{Mm} & \dfrac{\alpha_s^2}{Mm} \\ \dfrac{k(-\alpha_s^2 + km)}{Mm^2} & \dfrac{\alpha_s(-\alpha_s^2 + km)}{Mm^2} \\ \dfrac{\alpha_s k(\alpha_s^2 - 2km)}{Mm^3} & \dfrac{\alpha_s^2(\alpha_s^2 - 2km)}{Mm^3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

В представлении (34) выделено ненаблюдаемое подпространство относительно переменной ξ_4. При синтезе обратной связи на основе динамического компенсатора данная переменная не влияет на ошибку выходной переменной, поэтому динамический компенсатор строится относительно наблюдаемых компонент $\xi^* = (\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3)^{\mathrm{T}}$ вектора состояния возмущений ξ. Наблюдаемость пары (W^*, Q^*) проверяется непосредственной подстановкой

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} Q^* \\ Q^* W^* \\ Q^*(W^*)^2 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 .$$

где $W^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{\alpha_s}{m} \end{pmatrix}$, $Q^* = (1 \quad 0 \quad 0)$.

В принятых обозначениях

$$\dot{\xi}^* = W^* \xi^* + B_e^* e,\ B_e^* = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha_s k}{Mm} & \dfrac{\alpha_s^2}{Mm} \\ \dfrac{k(-\alpha_s^2 + km)}{Mm^2} & \dfrac{\alpha_s(-\alpha_s^2 + km)}{Mm^2} \\ \dfrac{\alpha_s k(\alpha_s^2 - 2km)}{Mm^3} & \dfrac{\alpha_s^2(\alpha_s^2 - 2km)}{Mm^3} \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Действительно, выберем управляющее воздействие согласно (7)

$$F = -MQ^* s + M\bar{u} \tag{36}$$

с динамическим компенсатором согласно (35)

$$\dot{s} = W^* s + B_e^* e - v \tag{37}$$

Замкнутая система в соответствии с (36)–(37)

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}} &= \upsilon_z, \\ \dot{\upsilon}_z &= -\frac{k}{M}\bar{z} - \frac{\alpha_s + \alpha_c}{M}\upsilon_z + Q^* \varepsilon + \bar{u}, \\ \dot{\varepsilon} &= W\varepsilon + v, \end{aligned} \tag{38}$$

где $\varepsilon = \xi^* - s$.

Выбирая управления $\bar{u}, v$ из выражения (9)

$$\begin{aligned} v &= -LKe + W^* L \upsilon_z, \\ \bar{u} &= \frac{k}{M}\bar{z} + \left(\frac{\alpha_s + \alpha_c}{M} + Q^* L\right)\upsilon_z + Ke, \end{aligned} \tag{39}$$

получим уравнения замкнутой системы согласно (38)–(39)

$$
\begin{aligned}
&\dot{z} = \upsilon_z,\\
&\dot{\upsilon}_z = Ke + Q^*(\varepsilon + L\upsilon_z),\\
&\dot{\varepsilon} = W^*\varepsilon - LKe + W^*L\upsilon_z,
\end{aligned}
$$

где $L = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, $K = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ – матрицы с постоянными коэффициентами.

Вводя новую переменную $\bar{\varepsilon} = \varepsilon + L\upsilon_z$, перепишем последнюю систему в виде

$$
\begin{aligned}
&\dot{z} = \upsilon_z,\\
&\dot{\upsilon}_z = Ke + Q^*\bar{\varepsilon},\\
&\dot{\bar{\varepsilon}} = (W^* + LQ^*)\bar{\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

В силу наблюдаемости пары (W^*, Q^*) сходимость переменной $\bar{\varepsilon}$ может быть назначена желаемым образом.

Для численного эксперимента выберем параметры, представленные в таблице 1.

Таблица 1. Численные значения параметров объекта управления, принятые при моделировании

Параметр	**Значение**
k, [Н/м]	200
α_s, [(Н·с)/м]	0.5
α_c, [(Н·с)/м]	2
m, [кг]	2
M, [кг]	3
c, [м]	2
a_2	10
a_1	31
a_0	30
$z(t_0)$, [м]	20
$\upsilon(t_0)$, [м/с]	0
$x(t_0)$, [м]	–0.0981
$\upsilon_x(t_0)$, [м/с]	0
z_{d}, [м]	20

Характеристический полином матрицы $W^* + LQ^*$

$$
p^3 + \frac{(\alpha_s - L_1 m)}{m} p^2 + \frac{(-\alpha_s L_1 + k - L_2 m)}{m} p + \frac{(-\alpha_s L_2 - kL_1 - L_3 m)}{m} = 0. \tag{40}
$$

Выберем матрицу L, чтобы назначить его коэффициенты в соответствии с эталонным уравнением

$$
p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0. \tag{41}
$$

с коэффициентами из таблицы 1

$$
p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0
$$

и корнями уравнения

$$
p_1 = -2,\; p_2 = -3,\; p_3 = -5.
$$

Согласно рассуждениям из (40)–(41) получаем

$$
\alpha_s - L_1 m = 10m,\; -\alpha_s L_1 + k - L_2 m = 31m,\; -\alpha_s L_2 - kL_1 - L_3 m = 30m
$$

Подставляя значения параметров из таблицы 1, вычислим коэффициенты обратной связи динамического компенсатора

$$L_1 = \frac{\alpha_s}{m} - 10 = -9.75;$$

$$L_2 = -\frac{\alpha_s}{m}\left(\frac{\alpha_s}{m} - 10\right) + \frac{k}{m} - 31 = 71.438;$$

$$L_3 = -\frac{\alpha_s}{m}\left(-\frac{\alpha_s}{m}\left(\frac{\alpha_s}{m} - 10\right) + \frac{k}{m} - 31\right) - \frac{k}{m}\left(\frac{\alpha_s}{m} - 10\right) - 30 = 927.141.$$

Принимается следующая матрица обратной связи K в управлениях (39)

$$K = (-1 \quad -2),$$

чтобы назначить постоянные времени

$$\tau_1 = \tau_2 = 1 \text{ с}^{-1}$$

в подсистеме относительно вектора e.

Результаты моделирования системы (29) с динамической обратной связью (36)–(37), (39) и начальными условиями из таблицы 1 представлены на рис. 2, 3.

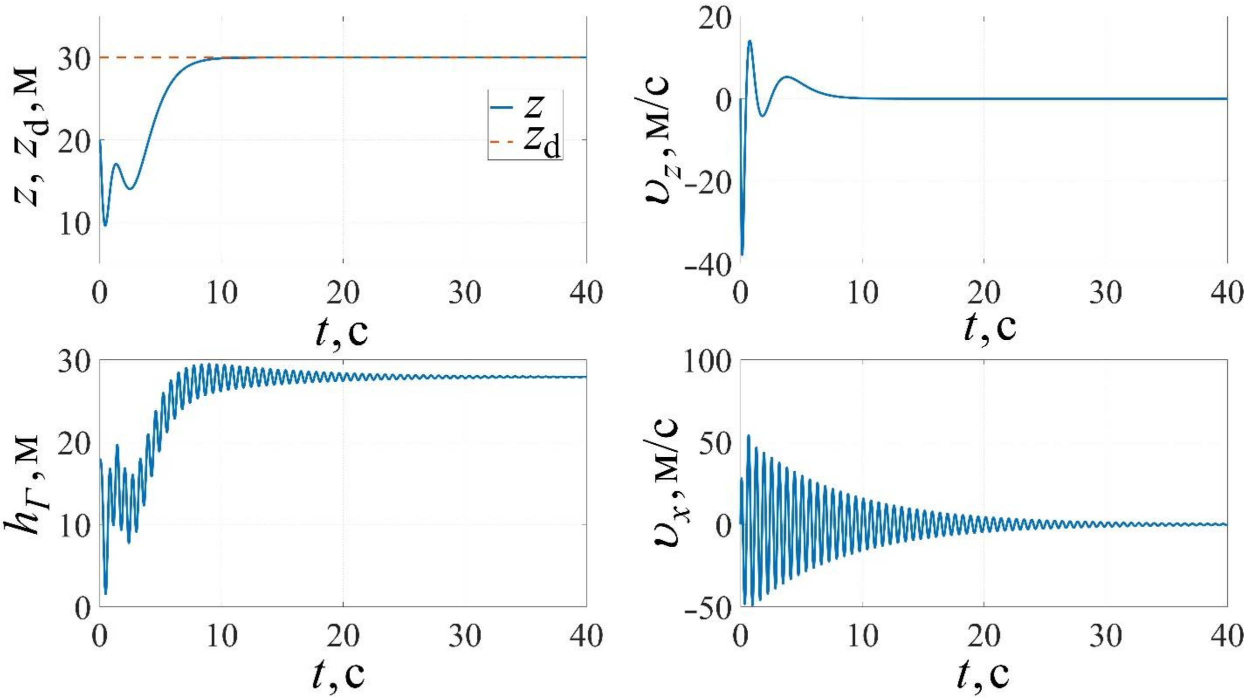

Рис. 2. Переходные процессы для переменных состояния системы (29)

Как видно из рис. 3 текущая высота положения летательного аппарата сходится к желаемому значению, а компоненты вектора s динамического компенсатора к соответствующим компонентам вектора возмущений ξ^*. Отметим, что несмотря на сходимость выходной переменной к нулю управляющее воздействие F содержит затухающую колебательную составляющую (см. рис. 3). Обусловлено это тем, что с помощью управления компенсируется колебания переменных x, υ_x, скорость затухания которых определяется коэффициентом α_s. Закон управления (36)–(37), (39) синтезировался без коррекции этого затухания, и по этой причине мы имеем «длинный хвост» в переходном процессе (см. рис. 2, 3). Однако в силу управляемости исходной системы (29) за счет коррекции с помощью компоненты υ_z (см. систему (31)) можно было бы скорректировать демпфирование компонент x, υ_x, а, следовательно, и длину указанного «хвоста».

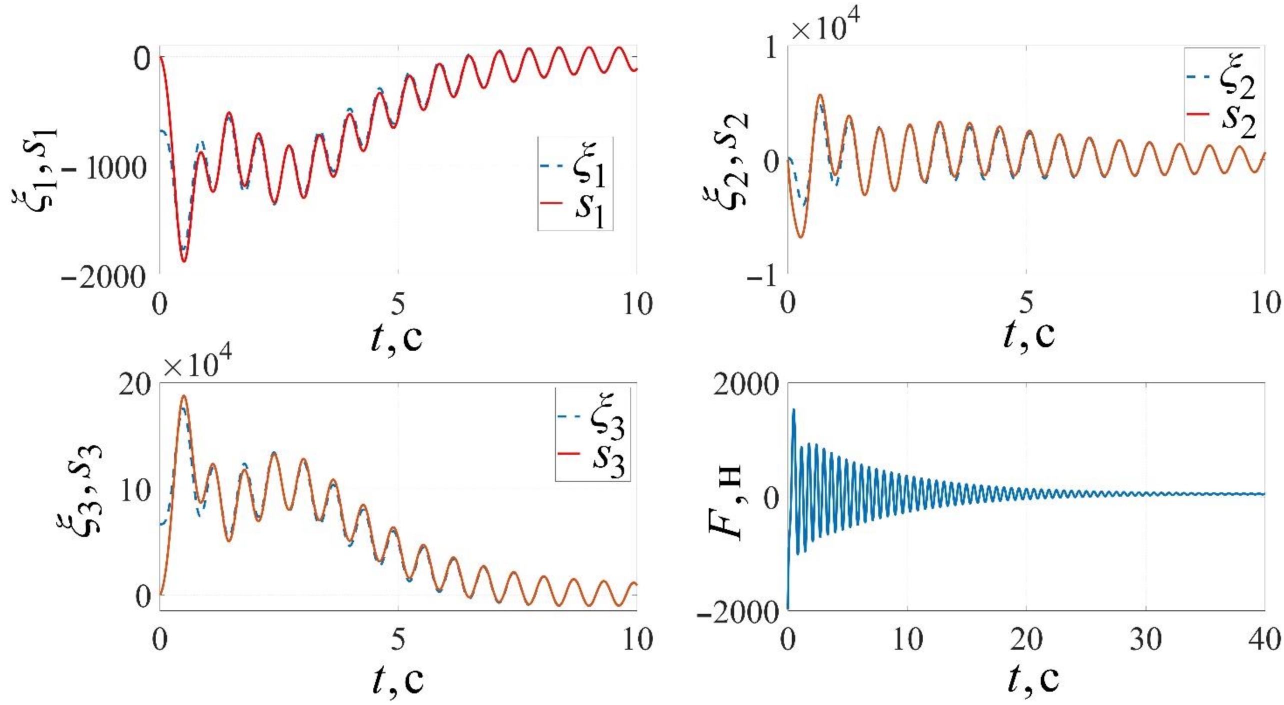

Рис. 3. Переходные процессы для компонент вектора возмущений (34) и динамического компенсатора (37)

4. Заключение

Предложены методы декомпозиции в задаче динамической компенсации внешних возмущений заданного класса. Использование методов синтеза систем с разделяемыми движениями в рамках теории скользящих режимов и глубоких обратных связей позволило расширить известные методы динамической компенсации на класс нелинейных систем и обеспечить робастные свойства как в условиях неопределенности модели объекта управления, так и генератора возмущений. Отметим, что рассмотренный пример управления БПЛА с колебательной нагрузкой, которую можно рассматривать как часть модели объекта управления, так и как внешнее возмущения показывает возможности расширения задач динамической компенсации внешних возмущений на задачи, где в качестве генератора заданий рассматривается часть модели объекта управления. Вместе с предложенными в данной работе декомпозиционными методами такой подход позволяет также декомпозировать процедуру синтеза обратной связи на подзадачи меньшей размерности.

Литература

1. *Кулебакин В. С.* К теории автоматических вибрационных регуляторов электрических машин // Теоретическая и экспериментальная электротехника. 1932. № 4. – с. 3–21.
2. *Schumacher J. M.* Compensator synthesis using (C, A, B,)-pairs // IEEE Trans. Automat. Control. – 1980. Vol. AC-7.
3. *Уткин В. А.* Метод разделения движений в задачах наблюдения. - Автоматика и Телемеханика, 1990, № 3, с.27-37.
4. *Уткин В. А., Уткин В. И.* Метод разделения в задачах инвариантности // Автоматика и Телемеханика. 1983. № 12. – С. 39–48.
5. *Лукьянов А.Г., Уткин В.И.* Методы сведения уравнений динамических систем к регулярной форме // Автоматика и телемеханика. 1981. № 4. – С. 5–13.
6. *Дракунов С.В., Изосимов Д.Б., Лукьянов А.Г., Уткин В.А., Уткин В.И.* Принцип блочного управления. Часть 1 // Автоматика и Телемеханика. 1990. № 5. – С. 38–47.