О ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Туницкий Д.В.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

dtunitsky@yahoo.com

Аннотация. Работа посвящена квазилинейным дифференциальных уравнениям первого порядка с одной неизвестной функцией. Изучается их глобальная разрешимость в классе многозначных решений. Установлено, что в этом классе с точностью до эквивалентности задача Коши имеет единственное наибольшее решение.

Ключевые слова: квазилинейные уравнения, характеристические расслоения, характеристические слоения, задача Коши, многозначные решения, максимальные решения.

Введение

Рассмотрим уравнение с частными производными первого порядка

$$A^1(x^1,\dots,x^n,u)\frac{\partial u}{\partial x^1}+\dots+A^n(x^1,\dots,x^n,u)\frac{\partial u}{\partial x^n}+A(x^1,\dots,x^n,u)=0, \tag{1}$$

где A^1, ..., A^n и A – заданные в области $X\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ функции класса $C^\infty(X)$. Это квазилинейное уравнение с n независимыми переменными $x^1,\dots,x^n$, $n=1,2,\dots$, и одной неизвестной функцией u. *Классическим решением* уравнения (1) называется функция $u=u(x^1,\dots,x^n)$ класса гладкости C^∞, график которой лежит в X и которая при подстановке в левую и правую части соотношения (1) обращает его в верное тождество, см. [1; гл. I].

Если классическое решение задано в параметрической форме

$$x^1=x^1(v^1,\dots,v^n),\qquad \dots,\qquad x^n=x^n(v^1,\dots,v^n),\qquad u=u(v^1,\dots,v^n),$$

и

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial v^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^1}{\partial v^n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial x^n}{\partial v^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial v^n}\end{vmatrix}\neq 0,$$

то по теореме об обратной функции

$$\frac{\partial u}{\partial x^1}=\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial v^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^1}{\partial v^n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial u}{\partial v^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial v^n}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial v^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^1}{\partial v^n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial x^n}{\partial v^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial v^n}\end{vmatrix}},\qquad \dots,\qquad \frac{\partial u}{\partial x^n}=\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial v^1} & \cdots & \dfrac{\partial u}{\partial v^n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial x^n}{\partial v^1} & \cdots & \dfrac{\partial u}{\partial v^n}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial v^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^1}{\partial v^n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial x^n}{\partial v^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial v^n}\end{vmatrix}}.$$

Подставляя эти выражения в левую часть уравнения (1) и домножая на $\begin{vmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial v^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial v^n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial x^n}{\partial v^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial v^n}\end{vmatrix}$, получим

$$A^1(x,u)\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial v^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^1}{\partial v^n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial u}{\partial v^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial v^n}\end{vmatrix}+\dots+A^1(x,u)\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial v^1} & \cdots & \dfrac{\partial u}{\partial v^n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial x^n}{\partial v^1} & \cdots & \dfrac{\partial u}{\partial v^n}\end{vmatrix}+A(x,u)\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial v^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^1}{\partial v^n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial x^n}{\partial v^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial v^n}\end{vmatrix}=0.$$

Левая часть полученного уравнения равна

$$\Omega\left(\left(\frac{\partial x^1}{\partial v^1},\dots,\frac{\partial x^n}{\partial v^1},\frac{\partial u}{\partial v^1}\right),\dots,\left(\frac{\partial x^1}{\partial v^n},\dots,\frac{\partial x^n}{\partial v^n},\frac{\partial u}{\partial v^n}\right)\right)$$

где

$$\Omega=\sum_{\alpha=1}^{n}A^\alpha dx^1\wedge\dots\wedge dx^{\alpha-1}\wedge du\wedge dx^{\alpha+1}\wedge\dots\wedge dx^n+Adx^1\wedge\dots\wedge dx^n. \quad (2)$$

– дифференциальная n-форма в области X.

Многозначное (геометрическое) решение уравнения (1) – это C^∞ погружение

$$\sigma\colon S\longrightarrow X \quad (3)$$

n-мерного многообразия S, удовлетворяющее внешнему дифференциальному уравнению

$$\sigma^*\Omega=0. \quad (4)$$

Если $u=u(x^1,\dots,x^n)$ – классическое решение (1) в области $S\subseteq\mathbb{R}^n$, то его график

$$\sigma\colon S\ni(x^1,\dots,x^n)\longmapsto\left(x^1,\dots,x^n,u(x^1,\dots,x^n)\right)\in X$$

является многозначным решением, потому что

$$\sigma^*\Omega_j=\left(\sum_{\alpha=1}^{n}A_j^\alpha(x,u)\frac{\partial u}{\partial x^\alpha}+A_j(x,u)\right)dx^1\wedge\dots\wedge dx^n=0.$$

Другими словами, всякое классическое решение является многозначным. Обратное, вообще говоря, неверно.

1. Характеристики

Уравнение (1) будем называть *невырожденным*, если $\Omega(x,u)\neq0$, т.е.

$$\left(A^1(x,u)\right)^2+\dots+\left(A^n(x,u)\right)^2+\left(A(x,u)\right)^2\neq0,\qquad (x,u)\in X.$$

Всюду в дальнейшем уравнение (1) предполагается невырожденным.

Касательный вектор $e\in\mathrm{T}_{(x,u)}X$, $(x,u)\in X$, называется характеристическим (характеристикой Коши), если его внутреннее произведение с n-формой Ω (2) равно нулю, т.е.

$$e\lrcorner\,\Omega=0,$$

где $\lrcorner$ – внутреннее умножение внешней формы на вектор. Поскольку последовательность

$$0\longrightarrow\Lambda^n_{(x,u)}X\xrightarrow{e\lrcorner}\Lambda^{n-1}_{(x,u)}X\xrightarrow{e\lrcorner}\dots\xrightarrow{e\lrcorner}\Lambda^1_{(x,u)}X\xrightarrow{e\lrcorner}\mathbb{R}\longrightarrow0$$

точна, то вектор e тогда и только тогда является характеристическим, когда n-формы

$$e\lrcorner\,(du\wedge dx^1\wedge\dots\wedge dx^n)$$

и Ω (2) коллинеарны. Поэтому в силу невырожденности уравнения (1) его характеристические векторы образуют в каждой точке $(x,u)\in X$ одномерное подпространство $H(x,u)\subseteq\mathrm{T}_{(x,u)}X$, порожденное векторным полем

$$e=A^1(x,u)\frac{\partial}{\partial x^1}+\dots+A^n(x,u)\frac{\partial}{\partial x^n}+A(x,u)A\frac{\partial}{\partial u},$$

для которого $e\lrcorner\,\Omega=0$.

Двойственным образом, линейная форма $\omega\in\mathrm{T}^*_{(x,u)}X$ называется *характеристической*, если его внешнее произведение с n-формой Ω_j (2) равно нулю, т.е.

$$\omega\wedge\Omega=0.$$

Характеристические формы ω образуют n-мерное подпространство $H^*(x,u)\subseteq\mathrm{T}^*_{(x,u)}X$, аннулирующее подпространство $H(x,u)$, т.е.

$$H^*(x,u) = \{\omega \in \mathrm{T}^*_{(x,u)}X \mid e \lrcorner \omega = 0\}.$$

В координатной записи для характеристической формы $\omega = B_1 dx^1 + \dots + B_n dx^n + B_{n+1} du$ имеем

$$\omega \wedge \Omega = \left(-\sum_{\alpha=1}^{n} A^\alpha B_\alpha + A B_{n+1} \right) du \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = 0,$$

т.е. координаты $(B_1, \dots, B_{n+1})$ формы ω удовлетворяют линейному однородному алгебраическому уравнению

$$\sum_{\alpha=1}^{n} A_j^\alpha B_\alpha - A_j B_{n+1} = 0.$$

Для всякой линейной формы $\omega \in \mathrm{T}^*_{(x,u)}X$ последовательность

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\omega\wedge} \Lambda^1_{(x,u)}X \xrightarrow{\omega\wedge} \dots \xrightarrow{\omega\wedge} \Lambda^{n-1}_{(x,u)}X \xrightarrow{\omega\wedge} \Lambda^n_{(x,u)}X \longrightarrow 0$$

точна. Поэтому можно таким образом выбрать базис $\omega_1, \dots, \omega_n$ характеристического подпространства H^*, что для внешней n-формы Ω (2) имеет место представление

$$\Omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n. \tag{5}$$

Таким образом, с уравнением (1) в области X ассоциированы *характеристическое векторное* $H \subseteq \mathrm{T}X$ подрасслоение размерности один и *характеристическое ковекторное* $H^* \subseteq \mathrm{T}^*X$ подрасслоения размерности n класса гладкости C^∞.

По теореме Фробениуса через всякую точку $(x,u) \in X$ проходит максимальное одномерное интегральное подмногообразие

$$\Gamma_{(x,u)} : G_{(x,u)} \longrightarrow X, \qquad (x,u) \in \Gamma_{(x,u)}\big(G_{(x,u)}\big), \tag{6}$$

характеристических подрасслоений H и H^*, причем $\Gamma_{(x,u)}\big(G_{(x,u)}\big)$ образуют слои одномерного C^∞ слоения $\mathcal{H}$ на X, см. [3; App., § 3] и [4; § 28]. Интегральные подмногообразия $\Gamma_{(x,u)}$ (6) будем называть *характеристиками уравнения* (1), а слоение $\mathcal{H}$ – *характеристическим*.

Имеет место

Лемма 1. *Пусть σ – многозначное решение (3) уравнения (1) и s – произвольная точка S. Если $\omega_1, \dots, \omega_n$ – базис характеристического подпространства $H^*\big(\sigma(s)\big)$, то среди ковекторов $\sigma^*\omega_1$,..., $\sigma^*\omega_n$ пространства $\mathrm{T}^*_s S$ ровно $n-1$ линейно независимых.*

Доказательство. Среди ковекторов $\sigma^*\omega_1$,...,$\sigma^*\omega_n$ насчитывается не менее $n-1$ линейно независимых. В противном случае найдутся неколлинеарные характеристические формы $\rho_1, \rho_2 \in H^*\big(\sigma(s)\big)$, аннулирующие подпространство $\sigma_*(\mathrm{T}_s S) \subseteq \mathrm{T}_{\sigma(s)}X$, что противоречит его n-мерности.

Ковекторы $\sigma^*\omega_1$,...,$\sigma^*\omega_n$ не могут быть линейно независимы, поскольку из представления (5) и равенства (4) следует

$$\sigma^*\omega = \sigma^*\omega_1 \wedge \dots \wedge \sigma^*\omega_n = 0.$$

Лемма доказана.

Из леммы 1 вытекает

Лемма 2. *Если погружение σ (3) – многозначное решение уравнения (1), то характеристические подрасслоения H и H^* этого уравнения индуцируют на S такие подрасслоения $H_\sigma \subseteq \mathrm{T}S$ и $H^\sigma \subseteq \mathrm{T}^*S$ класса гладкости C^∞ и размерностей один и $n-1$ соответственно, что*

$$\sigma_* H_\sigma(s) = H\big(\sigma(s)\big), \qquad H^\sigma(s) = \sigma^*\Big(H^*\big(\sigma(s)\big)\Big)$$

и H_σ аннулирует H^σ, т.е. $H_\sigma \lrcorner H^\sigma = 0$.

Будем называть H_σ *характеристическими векторным*, а H^σ – *ковекторным подрасслоениями многозначного решения* σ (3) уравнения (1). По теореме Фробениуса через всякую точку $s \in S$ проходит максимальное одномерное интегральное подмногообразие

$$\Gamma_s^\sigma : G_s^\sigma \longrightarrow S, \qquad s \in \Gamma_s^\sigma(G_s^\sigma), \tag{7}$$

характеристических подрасслоений H и H^*, причем $\Gamma_s^\sigma(G_s^\sigma)$ образуют слои одномерного C^∞ слоения $\mathcal{H}_\sigma$ на S. Интегральные подмногообразия Γ_s^σ (7) будем называть *характеристиками многозначного решения* σ (3) уравнения (1).

2. Локальные решения

Проведенные выше построения позволяют достаточно просто описать структуру локальных решений уравнения (1).

Действительно, по теореме Фробениуса в некоторой окрестности любой точки X найдутся независимые функции $y^1, \dots, y^{n-1}, w$, дифференциалы которых являются базисными сечениями подрасслоения H^* и аннулируют H, т.е. для векторного поля e имеем

$$e \lrcorner\, dw = 0, \qquad e \lrcorner\, dy^l = 0, \qquad l = 1, \dots, n-1.$$

Поэтому согласно представлению (5) имеем

$$\Omega = dw \wedge dy^1 \wedge \dots \wedge dy^{n-1}.$$

Отсюда, дополнив функции $y^1, \dots, y^{n-1}, w$ функцией y^n, чтобы получилась локальная система координат $y^1, \dots, y^n, w$, заключаем, что в этих координатах уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial w}{\partial y^n} = 0.$$

Очевидно, что общим решением этого уравнения служит

$$w = w(y^1, \dots, y^{n-1}).$$

Заметим, что в отличие от квазилинейного уравнения (1) нелинейные уравнения первого порядка общего вида

$$F_j\left(x^1, \dots, x^n, u, \frac{\partial u}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x^n}\right) = 0$$

точечной заменой переменных

$$(x^1, \dots, x^n, u) \longmapsto (y^1, \dots, y^n, w)$$

привести локально к аналогичному виду, вообще говоря невозможно. Однако, как показал В.В. Лычагин, это всегда возможно сделать с помощью контактных преобразований, см. [4; гл. II].

3. Глобальные решения

Начальное значение для многозначного решения σ (3) уравнения (1) задается C^∞ погружением

$$\sigma_0 : S_0 \longrightarrow X \tag{8}$$

$(n-1)$-мерного многообразия S_0, называемым *начальным погружением*. Решение σ (3) уравнения (1) называется *решением задачи Коши* (8), если найдется такое C^∞ вложение

$$\sigma_1 : S_0 \longrightarrow S, \tag{9}$$

что

$$\sigma_0 = \sigma \circ \sigma_1. \tag{10}$$

Вложение σ_1 называется *начальным*. Таким образом, решение задачи Коши (1), (8) – это пара (σ, σ_1), состоящая из решения σ (3) уравнения (1) и начального вложения σ_1 (9), для которых выполняется равенство (10).

Заметим, что для начального погружения σ_0 (8) самопересечения допустимы, в то время как для начального вложения σ_1 (9) недопустимы.

В дальнейшем будем предполагать, что начальное значение (8) *свободно*, т.е. для характеристик Γ_x (6) уравнения (1) выполняются условия

$$\sigma_0(S_0) \cap \Gamma_{\sigma_0(t)}\big(G_{\sigma_0(t)}\big) = \sigma_0(t), \qquad d\sigma_0(\mathrm{T}_t S_0) \cap d\Gamma_{\sigma_0(t)}\big(\mathrm{T}_{\sigma_0(t)} G_{\sigma_0(t)}\big) = 0, \qquad t \in S_0.$$

Решение (σ, σ_1) (3), (9) задачи Коши (1), (8) называется *определенным*, если всякая характеристика Γ_s^σ (7) решения σ (3) пересекается с начальным вложением (9) ровно в одной точке, т.е. выполняется равенство

$$\sigma_1(S_0) \cap \Gamma^{\sigma}_{\sigma_1(t)}\left(G^{\sigma}_{\sigma_1(t)}\right) = \sigma_1(t), \qquad t \in S_0.$$

Пусть (σ, σ_1) и $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1)$ – многозначные определенные решения задачи (1), (8). Будем говорить, что решение (σ, σ_1) *не меньше* решения $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1)$, и записывать $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1) \leq (\sigma, \sigma_1)$, если найдется такое C^∞ вложение

$$\varphi: \tilde{S} \longrightarrow S, \tag{11}$$

что

$$\sigma \circ \varphi = \tilde{\sigma}, \qquad \varphi \circ \tilde{\sigma}_1 = \sigma_1. \tag{12}$$

Введенное на множестве определенных решений (σ, σ_1) (3), (9) задачи Коши (1), (8) отношение «$\leq$» рефлексивно и транзитивно, но не антисимметрично, т.е. является отношением *предпорядка*.

Будем называть решения (σ, σ_1) и $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1)$ *эквивилентными*, $(\sigma, \sigma_1) \sim (\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1)$, если найдется такой диффеоморфизм φ (11), для которого выполняются равенства (12). Очевидно, что отношение «$\sim$» рефлексивно, симметрично и рефлексивно.

Если одновременно $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1) \leq (\sigma, \sigma_1)$ и $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1) \leq (\sigma, \sigma_1)$, то по определению найдутся такие C^∞ вложения φ (11) и

$$\tilde{\varphi}: S \longrightarrow \tilde{S},$$

что выполняются равенства (12) и

$$\tilde{\sigma} \circ \tilde{\varphi} = \sigma, \qquad \tilde{\varphi} \circ \sigma_1 = \tilde{\sigma}_1.$$

Следовательно,

$$\tilde{\sigma} \circ \tilde{\varphi} \circ \varphi = \sigma \circ \varphi = \tilde{\sigma}, \qquad \sigma \circ \varphi \circ \tilde{\varphi} = \tilde{\sigma} \circ \tilde{\varphi} = \sigma$$

и

$$\tilde{\varphi} \circ \varphi \circ \tilde{\sigma}_1 = \tilde{\varphi} \circ \sigma_1 = \tilde{\sigma}_1, \qquad \varphi \circ \tilde{\varphi} \circ \sigma_1 = \varphi \circ \tilde{\sigma}_1 = \sigma_1,$$

т.е.

$$\tilde{\sigma} \circ (\tilde{\varphi} \circ \varphi) = \tilde{\sigma}, \qquad \sigma \circ (\varphi \circ \tilde{\varphi}) = \sigma$$

и

$$(\tilde{\varphi} \circ \varphi)_{\tilde{\sigma}_1(S_0)} = \mathrm{Id}_{\tilde{\sigma}_1(S_0)}, \qquad (\varphi \circ \tilde{\varphi})_{\sigma_1(S_0)} = \mathrm{Id}_{\sigma_1(S_0)}.$$

Напомним, что σ и $\tilde{\sigma}$ – погружения, φ, $\tilde{\varphi}$ и σ_1, $\tilde{\sigma}_1$ – вложения, а решения (σ, σ_1) и $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1)$ являются определенными. Можно показать, что в этом случае

$$\varphi \circ \tilde{\varphi} = \mathrm{Id}_{\tilde{S}}, \qquad \tilde{\varphi} \circ \varphi = \mathrm{Id}_S,$$

т.е. φ и $\tilde{\varphi}$ являются взаимно обратными диффеоморфизмами.

Таким образом, имеет место

Лемма 3. *Для того, чтобы определенные решения (σ, σ_1) и $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1)$ задачи Коши (1), (8) были эквивалентны, $(\sigma, \sigma_1) \sim (\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1)$, необходимо и достаточно, чтобы одновременно $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1) \leq (\sigma, \sigma_1)$ и $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1) \leq (\sigma, \sigma_1)$.*

Из леммы 3 следует, что на множество классов эквивалентности определенных решений задачи Коши (1), (8) относительно «$\sim$» отношение «$\leq$» антисимметрично и задает структуру частично упорядоченного множества. Иными словами, «$\leq$» является отношением порядка.

Среди всех определенных решений (σ, σ_1) (3), (9) задачи Коши (1), (8) особый интерес представляют решения, наибольшие по отношению предпорядка «$\leq$». Более точно, определенное решение (σ, σ_1) (3), (9) задачи (1), (8), называется *наибольшим*, если $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1) \leq (\sigma, \sigma_1)$ для любого определенного решения $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1)$ этой задачи. Из леммы 3 очевидным образом вытекает следующая теорема о единственности наибольшего решения.

Теорема 1. *Если (σ, σ_1) и $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1)$ – наибольшие решения задачи Коши (1), (8), то они эквивалентны, $(\sigma, \sigma_1) \sim (\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1)$, т.е. с точностью до эквивалентности наибольшее решение единственно.*

Имеет место теорема о существовании наибольшего решения.

ТЕОРЕМА 2. *Наибольшее решение задачи Коши (1), (8) существует.*

Литература

1. *Courant R., Hilbert D. Methods of mathematical physics*, vol. II: *Partial differential equations*, (vol. II by R. Courant). – New York–London: Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, 1962. – 830 p.
2. *Reinhart B.L.* Differential Geometry of Foliations. – Berlin: Springer-Verlag, 1983. – 195 p.
3. *Tamura I*. Topology of Foliations: An Introduction. – Providence, RI: Translations of Mathematical Monographs, V. 97, AMS, 1992. – 193 p.
4. *Лычагин В.В.* Локальная классификация нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // УМН, 1975. Т. 30, вып. 1. – С. 101–171.