

АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ЭПИДЕМИИ

Уткин А.В., Ткачева О.С.,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
Utkin-AV@rambler.ru, kolga17@gmail.com

Виноградова М.С.

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана»,
Москва, Россия
m-s-vinogradova@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается поведение траекторий трехмерной модели эпидемии в замкнутой среде. Модель, представляющая собой систему из трех ОДУ, описывает динамику популяций хищников и жертв, с учетом, что хищники заражены. Найдены условия, при которых система имеет внутренние положения равновесия. Проведено численное моделирование поведения системы в окрестности найденных положений равновесия.

Ключевые слова: модель эко-эпидемии, положения равновесия, устойчивость, положительный октант.

Введение

В последние десятилетия в связи с усилением угроз биологическому разнообразию в естественных местообитаниях большое внимание уделяется моделям прогнозной популяционной экологии [1]. Наиболее важный вопрос, возникающий, в связи с этим вопросом, заключается в том, что позволяет видам сохраняться в природе либо в текущих условиях, либо после изменений в управлении или окружающей среде. В реальной жизни биологические популяции восприимчивых различным инфекционным заболеваниям и паразитам. Учет этого фактора при моделировании экологических систем приводит к существенному усложнению динамики классической модели «хищник-жертва». Такие модели называются экоэпидемиологическими моделями, и они активно изучаются в течение последних нескольких десятилетий, см., например, [2,3,4,5]. Наличие трансмиссивных заболеваний сильно влияет на результаты модели, которые включают будущее взаимодействующих популяций, их размер, стабильную или нестабильную динамику.

Математическое моделирование эпидемий является важным инструментом для понимания и прогнозирования распространения инфекционных заболеваний. Оно позволяет оценить вероятность возникновения эпидемии, определить оптимальные стратегии контроля и предотвращения ее распространения, а также оценить эффективность различных мер по борьбе с заболеванием. С помощью математических моделей можно проводить анализ эпидемиологических данных, определять скорость распространения заболевания, оценивать вероятность заражения, прогнозировать число заболевших и умерших, а также определять оптимальные меры по борьбе с эпидемией. Кроме того, математическое моделирование эпидемий является важным инструментом для разработки вакцин и лекарств от инфекционных заболеваний, позволяющим спрогнозировать разные побочные эффекты.

Одним из наиболее мощных методов изучения математических моделей является анализ качественных свойств динамических объектов, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений невысокой размерности, которые используются как модели различных процессов в научных исследованиях в биологии, медицине. Важнейшим пунктом в исследовании поведения динамических систем является количество положений равновесий [4-8].

Рассмотрим некоторые примеры качественного анализа. В [3] представлена модель растений, подверженных заболеваниям, связанным с насекомыми. Исследованы основные результаты по ограниченности решений, достижимость точек равновесий, равномерной устойчивости, а также вопросы локальной и глобальной устойчивости стандартными методами теории устойчивости. В [5] построена и проанализирована нелинейная математическая модель, используемая для воздействия вакцинации на борьбу с инфекционным заболеванием. В данном случае, примером инфекционного заболевания служил японский энцефалит со стандартным уровнем заболеваемости комаров, свиней и людей. В работе исследовалось поведение системы, локальная и глобальная устойчивость системы для всех состояний равновесия. Найдено условие на параметры системы при выполнении, которого эпидемия прекращается, так как исчезает инфицированная популяция. В [4,8] моделируется болезнь с зависимой от плотности передач в колебательной системе хищник-жертва. Показано, что условие сохранения болезни в циклах хищник – жертва основано на средней по времени плотности у носителя, а не на равновесной плотности. В перечисленных работах совпадает общий вид моделей, но вариация параметров приводит к разному поведению. Таким образом, возникает задача разработки

аналитического подхода к классификации эпидемиологических моделей для своевременного предсказания ее поведения.

В работе рассматривается трехмерная модель эпидемии, в замкнутой среде [3,5,8]. Рассматриваемая модель представляет собой модель больных хищников, которая относится к типу хищник-жертва Розенцвейга-Макартура с болезнью у хищника и с силой заражения, зависящей от плотности популяции. Это означает, что болезнь разделяет популяцию хищников на восприимчивую популяцию и зараженную популяцию. Работа состоит из нескольких разделов. В первом разделе описывается математическая модель. Второй раздел посвящен количеству точек покоя, условиям их существования в положительном октанте. В третьем разделе оценивается возможность аналитического нахождения устойчивости точек покоя и проводится численное моделирование, позволяющее интерпретировать полученные результаты с биологической точки зрения.

1. Математическая модель

Рассмотрим следующую модель эпидемии, описываемую с учетом биологических ограничений на фазовые переменные и параметры:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_1 y_1 - a_1 y_1^2 - \frac{y_1(y_2 + y_3)}{a_2 + y_1}; \\ \dot{y}_2 = \frac{y_1(y_2 + y_3)}{a_2 + y_1} - a_3 y_2 - a_4 y_2 y_3; \\ \dot{y}_3 = y_3 (a_4 y_2 - a_3 - a_5). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $y_1(t)$ – это нормированная плотность популяций жертвы, $y_2(t)$ – это нормированная плотность популяций восприимчивых хищников, $y_3(t)$ – это нормированная плотность популяций зараженных хищников; $y_i > 0, i = 1, 2, 3$: В уравнениях (1) параметры $a_i = 1 \dots 5$ – это перемасштабированные параметры: a_1 – скорость прироста добычи на душу населения (при редкости хищников); a_2 – плотность полунасыщения для функционального ответа II типа по Холлингу; a_3 – естественная подушевая смертность хищника; a_4 – коэффициент контагиозности (заразности) болезни; a_5 – смертность хищника от болезней на душу населения.

Уточним, некоторые используемые термины. Плотность полунасыщения для функционального ответа II типа по Холлингу – это зависимость рациона от концентрации пищи называется функциональной реакцией (functional response). Этот термин обычно используют при описании взаимодействия «хищник-жертва» [3]. Число съеденных жертв сначала быстро растет, а затем рост числа жертв замедляется и выходит на плато [1,3].

Следует отметить, что все параметры и фазовые переменные системы ограничены из биологических соображений.

Наш основной исследовательский интерес вызывают явления сохранения/вымирания популяций хищников, в том числе наиболее необычный для природы случай, когда жертва и восприимчивые хищники сохраняются, а инфицированные хищники вымирают. В этой ситуации конкуренция за пищу между популяциями восприимчивых и зараженных хищников стремится к нулю. Вымирание зараженных хищников можно рассматривать как самовосстановление популяции хищников и экосистемы в целом. Данная работа уточняет и расширяет работы [2,8].

2. Точки покоя

В этом разделе уточним полученные в [8] условия на параметры $a_i, i = 1..5$, при которых система (1) имеет две внутренних точки покоя в правом октанте – это явление описывает случай сохранения/вымирания популяций хищников, в том числе достаточно редкий случай, когда жертвы и незараженные хищники выживают, а популяция зараженных хищников вымирает. Приравняв к нулю все производные системы (1), получим систему для поиска положений равновесия (2):

$$\begin{cases} a_1 y_1 - a_1 y_1^2 - \frac{y_1(y_2 + y_3)}{a_2 + y_1} = 0; \\ \frac{y_1(y_2 + y_3)}{a_2 + y_1} - a_3 y_2 - a_4 y_2 y_3 = 0; \\ y_3 (a_4 y_2 - a_3 - a_5) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Заметим, что система (2) может иметь до шести положений равновесия, два из которых существуют всегда, лежат в неотрицательном октанте: $E_1(0,0,0)$, $E_2(1,0,0)$. Расположение следующих двух

положений равновесия зависят от значений параметров: $E_3 \left(0, \frac{(a_3 + a_5)}{a_4}, -\frac{a_3}{a_4} \right)$, $E_4 \left(\frac{(a_2 a_3)}{1-a_3}, \frac{a_1 a_2 (a_3 - 1 + a_2 a_3)}{1-a_3}, 0 \right)$.

Чтобы существовало положение равновесия E_3 необходимо:

$$\frac{a_3}{a_4} < 0, \quad \frac{(a_3 + a_5)}{a_4} > 0.$$

Это возможно при $a_4 > 0, a_3 < 0, a_5 > -a_3 > 0$, или при $a_4 < 0, a_3 > 0, a_5 < -a_3 < 0$. Однако, исходя из биологических соображений, параметры $a_2, a_3, a_4 > 0$. Таким образом, положение равновесия E_3 всегда лежит за пределами нужной области.

Для уточнения существования положение равновесия E_4 при $a_2, a_3, a_4 > 0$ выпишем следующие условия:

$$1 - a_3 > 0, a_3 - 1 + a_2 a_3 > 0.$$

Рассмотрим условия, когда существуют внутренние положения равновесия E_5 и E_6 . Заметим, что координата y_2 фиксирована, $y_2 = \frac{a_3 + a_5}{a_4}$. Тогда можно преобразовать систему (2). Пусть известно одно из решений системы (2), $y_1 = y_{1*}$. Тогда из второго уравнения системы (2) найдем y_3 :

$$y_3 = -y_{1*}^2 + y_{1*} - \frac{(a_3 + a_5)}{a_4 a_1}.$$

Возвращаясь к y_{1*} , получаем следующее уравнение, к которому преобразуется система (2):

$$y_{1*}^2 - \left(\frac{a_2}{\alpha} + 1 \right) y_{1*} + \left[\frac{a_2}{\alpha} - \frac{a_5}{a_1 a_4 \alpha} \right] = 0, \alpha = \frac{1}{a_3 + a_5} - 1. \quad (3)$$

Запишем условие существования двух действительных корней уравнения (2):

$$\begin{aligned} D_0 &= \left(\frac{a_2}{\alpha - 1} \right)^2 + 4 \frac{a_5}{a_1 a_4 \alpha} > 0, \\ a_2 / \alpha + 1 &> 0, \\ \frac{a_2}{\alpha} - \frac{a_5}{a_1 a_4 \alpha} &> 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Запишем условие существования одной точки покоя (фактически, выполнение этого условия означает бифуркацию):

$$\left(\frac{a_2}{\alpha - 1} \right)^2 = 4 \frac{a_5}{a_1 a_4 \alpha}, \alpha < 0.$$

Рассмотрим условия положительности y_3 при $y_{1*} > 0$. Положительность y_3 зависит от диапазона значений y_{1*} :

$$y_{1*}(-y_{1*} + 1) - a_3 \frac{(a_3 + a_5)}{a_4 a_1} > 0. \quad (5)$$

Видно, что для выполнения условия (5) необходимо $y_{1*} < 1$.

Таким образом, получаем, что корни уравнения (3) должны находиться в следующем промежутке $[0, 1]$. Это необходимое, но не достаточное условие. Заметим, что y_3 квадратично зависит от y_{1*} . Запишем неравенства, ограничивающие корни уравнения (5):

$$\begin{aligned} -2 < \frac{a_2}{\alpha} - 1 + \sqrt{\left(\frac{a_2}{\alpha} - 1 \right)^2 + 4 \frac{a_5}{a_1 a_4 \alpha}} < 0; \\ -2 < \frac{a_2}{\alpha} - 1 - \sqrt{\left(\frac{a_2}{\alpha} - 1 \right)^2 + 4 \frac{a_5}{a_1 a_4 \alpha}} < 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим случай $\alpha > 0$, то есть $a_3 + a_5 < 1$. При $\alpha > 0$ и $(\forall i) a_i > 0$ первое выражение из (3) всегда положительно.

Запишем условия ограниченности корней (6) с учетом $\alpha > 0$. При $\alpha > 0$ выполняется $\frac{a_2}{\alpha} > 0$, то есть условие $\frac{a_2}{\alpha} + \sqrt{D} < 0$ невыполнимо. Таким образом, при $\alpha > 0$ не существует двух точек покоя для системы (1) в правом октанте.

Рассмотрим второй случай: $\alpha < 0$. Выпишем первое выражение из условия (4):

$$D_0 = \alpha^2 + \alpha \left(4 \frac{a_5}{a_1 a_4} - 2a_2 \right) + a_2^2 > 0.$$

Это парабола, зависящая от параметра α . Зафиксируем $a_1, a_2, a_4, a_5 > 0$, пусть изменяется только $a_3 > 0$. Когда уравнение $D_0 = 0$ не имеет корней в области $\alpha < 0$, у уравнения (3) могут быть действительные корни. Это возможно, если уравнение не имеет корней в принципе, или если нет корней в области $\alpha < 0$.

Рассмотрим первый случай, предполагая, что $D_\alpha = 0$ не имеет корней:

$$D_1 = \frac{a_5}{a_1 a_4} \left(\frac{a_5}{a_1 a_4} - a_2 \right) < 0$$

Отсюда получаем следующее:

$$a_2 > \frac{a_5}{a_1 a_4}.$$

Здесь видно противоречие с полученным ранее результатом.

Рассмотрим вариант, когда уравнение $D_\alpha = 0$ имеет корни в области $\alpha < 0$, рассматривается следующая область: $\alpha \in (\infty, \alpha_1] \cup [\alpha_2, 0)$, где выполнено

$$\alpha_{1,2} = -4 \frac{a_5}{a_1 a_4} + 2a_2 \pm \sqrt{D_1}.$$

Таким образом:

$$D'_\alpha |_{\alpha=0} = 4 \frac{a_5}{a_1 a_4} - 2a_2 > 0, \quad \frac{a_5}{a_1 a_4} > a_2.$$

Выбираем наиболее сильное условие, которое обеспечит существование α_1, α_2 в отрицательной области:

$$\frac{a_5}{a_1 a_4} > a_2$$

Это не противоречит уже полученным условиям. Тогда можем обобщить все полученные условия на параметры в следующую систему неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 < \frac{a_5}{a_1 a_4}; \\ \alpha \left(-\infty, -4 \frac{a_5}{a_1 a_4} + 2a_2 - \sqrt{D_1} \right) \cup \left(-4 \frac{a_5}{a_1 a_4} + 2a_2 + \sqrt{D_1}, 0 \right); \\ \frac{a_2}{2} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{a_5}{a_1 a_4} \left(\frac{a_5}{a_1 a_4} - a_2 \right)} < \frac{a_5}{a_1 a_4}; \\ -2 < \frac{a_2}{\alpha} - 1 + \sqrt{\left(\frac{a_2}{\alpha} - 1 \right)^2 + 4 \frac{a_5}{a_1 a_4 \alpha}} < 0. \end{array} \right. \quad (7)$$

Таким образом, получены условия на коэффициенты системы (1), при которых она будет иметь два внутренних положения равновесия в правом октанте.

3. Устойчивость полученных точек покоя

Для анализа устойчивости по первому приближению выпишем матрицу Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} a_1 - 2a_1 y_1 - \frac{(y_2 + y_3)(a_2)}{(a_2 + y_1)^2} & -\frac{y_1}{a_2 + y_1} & -\frac{y_1}{a_2 + y_1} \\ \frac{(y_2 + y_3)(a_2)}{(a_2 + y_1)^2} & \frac{y_1}{a_2 + y_1} - a_3 - a_4 y_3 & \frac{y_1}{a_2 + y_1} - a_4 y_2 \\ 0 & y_3 a_4 & a_4 y_2 - a_3 - a_5 \end{pmatrix}.$$

Подставим в полученную матрицу y_2, y_3 , как параметры, зависящие от y_1 :

$$J = \begin{pmatrix} a_1 - 2a_1y_1 - J_1 & -J_3 & -J_3 \\ J_1 & J_3 - a_3 + J_2 & J_3 - a_5 - a_3 \\ 0 & J_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь:

$$J_1 = (a_2(-y_1^2 + y_1 + (a_3 + a_5)/a_4 - (a_3 + a_5)/(a_1a_4)))/(a_2 + y_1)^2;$$

$$J_2 = a_4 \left(y_1^2 - y_1 + \frac{a_3 + a_5}{a_1a_4} \right);$$

$$J_3 = \frac{y_1}{a_2 + y_1}.$$

На данном этапе видно, что дальнейший аналитический анализ смысла не имеет, перейдем к численному моделированию.

Подберем параметры a_i согласно условиям (6):

$$(a_1 = 11 \quad a_2 = 0.1 \quad a_3 = 0.5 \quad a_4 = 1.5 \quad a_5 = 3.4)$$

Тогда система (1) имеет шесть положений равновесия: $E_1(0,0,0)$, $E_2(1,0,0)$, $E_3(0,2.6, -0.34)$, $E_4(0.10,1.98,0)$, $E_5(0.22,2.6,0.153)$, $E_6(0.64,2.6,0.31)$. Отметим, что это максимальное количество точек покоя для данной системы.

Рассмотрим внутренние положения равновесия E_5 и E_6 . Определим устойчивость этих положений равновесия. Собственные числа матрицы Якоби в точке E_5 : $(2.83, 0.29 + 0.81i, 0.29 - 0.81i)$. Таким образом, точка E_5 – это неустойчивый узел. Собственные числа матрицы Якоби в точке E_6 : $(-3.5, -0.1 + 1.23i, -0.10 - 1.23i)$. Точка E_6 – это устойчивый узел.

Фазовые портреты системы в окрестности точек E_5 и E_6 были построены в среде для численного моделирования MATLAB (рис. 1,5). Можно видеть, что в окрестности точки E_5 траектории расходятся (рис. 1), а в окрестности точки E_6 сходятся к точке покоя (рис. 2).

Рассмотрим фазовые портреты (рис. 1,2) системы с точки зрения биологии.

Обратим внимание на поведение траекторий системы при начальных условиях, взятых в окрестности точки покоя E_5 . Видно, что при таких начальных условиях количество зараженных и восприимчивых к болезни хищников растет, то есть болезнь продолжает распространяться (рис. 2).

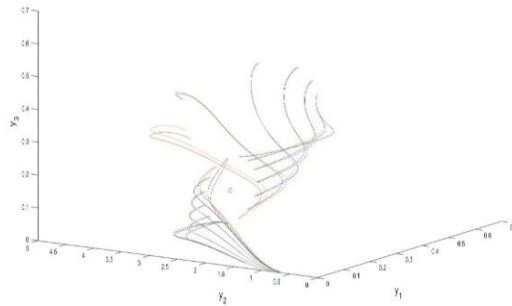


Рис. 1. Фазовый портрет системы (1) в окрестности точки покоя E_5

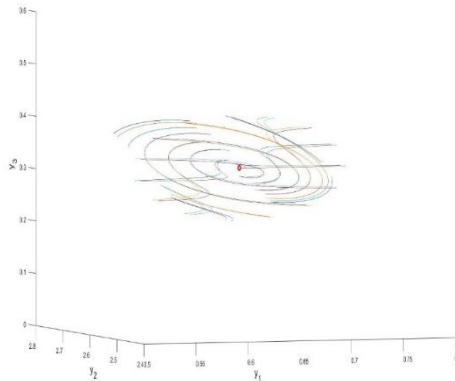


Рис. 2. Фазовый портрет системы (1) в окрестности точки покоя E_6

4. Заключение

В работе рассматривается трехмерная модель эко-эпидемии. В рамках качественного анализа для модели были рассмотрены условия, при которых она может иметь до пяти положений равновесия в положительном октанте. С учетом найденных условий были подобраны параметры модели, проведена классификация точек покоя в первом приближении. Было проведено численное моделирование и построен фазовый портрет системы в окрестности точек покоя. Справедливость проведенного анализа подтверждается фазовыми портретами системы в окрестности точек покоя. Стоит отметить, что полученные условия существования одной или двух точек покоя являются условиями бифуркации. Данное исследование можно использовать для предварительного анализа поведения эпидемии в замкнутых экологических системах.

Литература

1. *Малинецкий Г.Г.* Математические основы синергетики. М.: Изд-во URSS, 2017. – 322 с.
2. *Bate A., Hilker F.* Predator-prey oscillations can shift when diseases become endemic // *Journal of theoretical biology.* – 2012. – V. 316. – P. 1–8.
3. *Krishchenko A.P., Starkov K.E.* Stabilization in a 3D eco-epidemiological model: From the complete extinction of a predator population to their self-healing // *Mathematical methods in the applied sciences.* – 2020. – V. 18. – P. 10646–10658.
4. *Debasis M.* Effect of constant immigration in plant–pathogen–herbivore interactions // *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science.* – 2019. – V. 160. – P. 192–200.
5. *Baniya V., Keval R.* The influence of vaccination on the control of JE with a standard incidence rate of mosquitoes, pigs and humans // *Journal of Applied Mathematics and Computing.* – 2020. – V. 64. – P. 519–550.
6. *Shakhmurov V., Maharramov A., Shahmurzada B.* The local and global dynamics of a cancer tumor growth and chemotherapy treatment model. – 2018.
7. *Krishchenko A., Starkov K.* The four-dimensional Kirschner-Panetta type cancer model: How to obtain tumor eradication? *Mathematical Biosciences and Engineering.* – 2018. – V.15. – P. 1243-1254.
8. *Ткачева О.С., Рассадин Ю.М.* Поведение траекторий трехмерной системы эпидемии в окрестности точек покоя Труды 18-й Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2022, Челябинск). Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ. – 2022. – С. 498-502.