КОНТРОЛЬ ГОЛОСОВАНИЯ ПУТЕМ РАЗДЕЛЕНИЯ ИЗБИРАТЕЛЕЙ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ШУЛЬЦЕ

Блохина А.И., Самойлова И.А.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
aiblokhina2000@gmail.com, samoilova.irina@inbox.ru

Аннотация. В работе исследовалось применение метода Шульце для голосования в малых группах с точки зрения возможности контроля голосования. Были описаны несколько стратегий контроля голосования путём разделения избирателей и исследована их результативность в численных экспериментах и на реальных данных.

Ключевые слова: коллективные решения, принцип Кондорсе, метод Шульце, манипулирование.

Введение

Проблема коллективного выбора и механизм проведения соответствующих процедур для малых групп является важной задачей управления и группового принятия решений. Коллективные решения могут приниматься различными способами. Это может быть диктатура, когда решение принимается одним индивидом. Решение может также приниматься на основании обычая в широком смысле слова (традиции, религиозные нормы). Однако если говорить о способах коллективного принятия решений, учитывающих предпочтения участников группы, то можно выделить рыночные механизмы и голосование. Рыночные механизмы обычно применяются для принятия экономических решений (например, решение задачи оптимального распределения ресурсов через рыночное ценообразование) [1].

В некоторых случаях индивидуальные решения членов группы, если они рациональны, приводят к оптимальным результатам для всей группы. Тогда между индивидуальной и коллективной рациональностью нет противоречия, и решение может быть принято на основании рыночных механизмов. Однако нередко возникают случаи, когда действия, направленные на увеличение индивидуальной выгоды, приводят к неоптимальному результату для группы. Примером может служить «трагедия общин», когда свободный доступ индивидов к ресурсу приводит к его истощению. К тому же, такой способ коллективного выбора может использоваться для принятия экономических решений, но не подходит, например, для принятия политических решений. Поэтому голосование играет большую роль при принятии коллективных решений.

Голосования можно разделить по числу участников на два типа: всеобщее голосование и голосование в малых группах. Голосования первого типа проводятся в масштабах региона или государства; в них принимают участие сотни тысяч и миллионы избирателей. Голосования в малых группах подразумевают участие нескольких десятков избирателей (например, членов совета директоров компании). В таких случаях чаще используются правила голосования, которое учитывало бы предпочтения избирателей относительно всех альтернатив. Также при голосовании в малых группах можно предполагать большую информированность организатора голосования о предпочтениях избирателей, что может оказать влияние на дизайн правила голосования. В данной работе рассматриваются голосования в малых группах и учтены указанные особенности.

Голосование могут быть подвержены манипулированию не только со стороны избирателей, но и со стороны организаторов (контроль голосования). Например, можно использовать методы дизайна механизмов, то есть создания таких правил, при которых рациональные действия агентов (избирателей) приведут к результату, нужному организатору.

Несмотря на схожесть проблематики, рассматриваемой в работе, и задач избирательных систем, стоит отметить и существующие различия. Управленческое влияние руководителя группы («владельца») на дизайн применяемых процедур и часто имеющееся у него представление о желательном или – наоборот – нежелательном итоговом групповом предпочтении, открывают новые перспективы по конструированию соответствующих методов.

Одним из относительно новых правил голосования является метод Шульце, представленный Маркусом Шульце в 1997 году [2]. В работе рассмотрено использование контроля голосования при применении данного метода.

Целью работы является исследование стратегий контроля голосования с учетом особенностей голосования в малых группах.

1. Правила голосования

Определение. Рассмотрим произвольное множество A. Говорят, что на множестве A задано бинарное отношение P, если $P \subseteq A \times A$.

Если элементы $x, y \in A$ находятся в бинарном отношении P, это обозначается как xPy.

Строгое отношение предпочтения xPy является бинарным отношением, которое может быть интерпретировано как "x лучше y". Нестрогое отношение предпочтения — бинарное отношение xRy, которое может быть интерпретировано как "x не хуже, чем y". Далее в тексте отношения предпочтения будут называться просто предпочтениями.

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ – множество альтернатив, а $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ – конечное множество избирателей, $N = |V|$. Каждый из избирателей выражает своё мнение отношением предпочтения R_i. Профиль предпочтений избирателей $R = \{R_1, \ldots, R_n\}$ является элементом из A^N .

Определение. Правилом голосования является любое отображение $F: A^N \rightarrow A$, ставящее в соответствие каждому профилю предпочтений R непустое множество из A [3].

Результатом голосования может быть, в зависимости от правила, либо одна альтернатива-победитель, либо результирующее предпочтение. Будем обозначать результирующее предпочтение как $\hat{R}$.

Ниже описаны правила голосования, которые использовались в исследованиях.

Процедура Борда. Каждый избиратель ранжирует m альтернатив от лучшего к худшему. На основании ранжирования каждой альтернативе присваивается ранг: ранг равен 1, если альтернатива оказалась на последнем месте, 2 – если на предпоследнем, m – если на первом. Обозначим ранг, присвоенный i-м избирателем j-ой альтернативе как $r_i(a_j)$. Ранги каждой альтернативы суммируются по всем избирателям: $r(a_i) = \sum_{j=1}^{n} r_j(a_i)$. Победителем объявляется альтернатива с наибольшей суммой рангов: $c \in C(A, R) \Leftrightarrow c = argmax_{a_i \in A} \sum_{j=1}^{n} r_j(a_i)$ Остальные альтернативы упорядочиваются по убыванию суммы рангов.

Метод Шульце. Для описания метода предварительно дадим несколько определений и введём необходимые обозначения.

Обозначим $N[x, y]$ количество избирателей, предпочитающих альтернативу x альтернативе y. Предположим, что сила звена xy зависит только от $N[x, y]$ и $N[y, x]$ и обозначим её $(N[x, y], N[y, x])$. Есть разные способы определить силу звена ab. Мы примем $(N[x, y], N(y, x]) = N[x, y]$.

Путём от альтернативы $x \in A$ до альтернативы $y \in A \backslash \{x\}$ называется последовательность $c(1), c(2), \ldots, c(k) \in A$ альтернатив, удовлетворяющая следующим свойствам:

$$x = c(1)$$

$$y = c(k)$$

$$k \in N, 2 \leq k \leq m$$

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, k\}: i \neq j \Longrightarrow c(i) \in A \backslash \{c(j)\}$$

Силой пути называется $min\{(N[c(i), c(i+1)], N[c(i+1), c(i)])|\ i = 1, \ldots, (k-1)\}$, т.е. наименьшая из сил звеньев, входящих в этот путь.

Назовем силой сильнейшего пути от $x \in A$ до $y \in A \backslash \{x\}$ $P[x, y] = max\{\ min\{(N[c(i), c(i+1)], N[c(i+1), c(i)]|i = 1, \ldots, (k-1)\}|c(1), \ldots, c(n)$ – путь от x к $y\}$.

Введем бинарное отношение O на A: $xOy \Leftrightarrow P[x, y] > P[y, x]$. Множество возможных победителей определяется как

$$S = \{x \in A \mid \forall\, y \in A \backslash \{x\}\ y\bar{O}x\}$$

или

$$S = \{x \in A \mid \forall\, y \in A \backslash \{x\}\ P[x, y] \geq P[y, x]\}$$

Голосование методом Шульце строится следующим образом:

Каждый избиратель ранжирует кандидатов. Допускается присваивать кандидатам одинаковые ранги.

Производится расчет $N[x, y]$ – количества избирателей, предпочитающих альтернативу x альтернативе y для всех $x, y \in A$.

Для каждой пары альтернатив x, y вычисляется сила сильнейшего пути $P[x, y]$.

Определяется бинарное отношение O и множество победителей.

При применении метода Шульце в голосованиях в малых группах целесообразно учитывать:

- возможность манипулирования в условиях полной информированности;
- полное результирующее предпочтение, а не только альтернативу-победителя, что обусловливает задачу данной работы: исследование контроля голосования для метода Шульце с учётом расстояния между предпочтениями.

Различия между предпочтениями будем определять следующим образом, описанным в [4]. Пусть имеются два строгих предпочтения над m альтернативами: $P_1 = (a_1^1, \dots a_m^1)$ и $P_2 = (a_1^2, \dots, a_m^2)$. Составим матрицы предпочтений $||p_{\{ij\}}^1||$ и $||p_{\{ij\}}^2||$ по следующему правилу:

$$p_{ij}^k = \begin{cases} 1, a_i P_k a_j \\ 0, i = j \\ -1, a_j P_k a_i \end{cases}$$

Расстоянием между предпочтениями P_1 и P_2 будем называть величину

$$d(P_1, P_2) = \sum_{i,j=1}^{m} |p_{ij}^1 - p_{ij}^2|$$

2. Контроль голосования

С помощью методов дизайна механизмов организатор голосования может добиться желаемого результата голосования. Но и при неизменном правиле голосования повлиять на результат можно добавлением альтернатив, разбиением избирателей на группы. Такого вида манипуляции при голосовании изучаются в области контроля голосования (electoral control). В статье Дж. Бартольди и др. [5] описаны способы контроля голосования: добавление, удаление и разделение альтернатив; добавление, удаление и разделение избирателей.

В работе рассматривается задача деструктивного манипулирования путем разделения избирателей с учетом полных предпочтений.

Имеется:

- множество избирателей $V = \{v_1, \dots, v_n\}$;
- профиль в общем случае нестрогих предпочтений n избирателей $R = \{R_1, \dots, R_n\}$ над m альтернативами $A = \{a_1, \dots, a_m\}$;
- правило голосования F;
- нежелательный для организатора результат R'.

Результат применения правила голосования к профилю предпочтений R обозначим $\hat{R} = F(R)$.

Задачу деструктивного манипулирования со стороны организатора путем разделения избирателей сформулируем следующим образом: при заданном числе $D \geq 0$ найти подмножества $V_1, \dots, V_k$ множества V, такие что:

- $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k = V$
- $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_k = \emptyset$
- $max_{i,j}||V_i| - |V_j|| \leq D$
- $d(F(F(R_1), \dots, F(R_k)), R')$ максимально возможное.

Другими словами, задача манипулирования состоит в том, чтобы при двухступенчатых выборах найти такое разбиение избирателей, которое обеспечило бы максимально возможную при данном профиле предпочтений дальность результата голосования от нежелательного результата. Число D отвечает за то, насколько разными по численности могут быть группы.

Процесс двухступенчатого голосования с разделением избирателей схематично представлен на рис. 1.

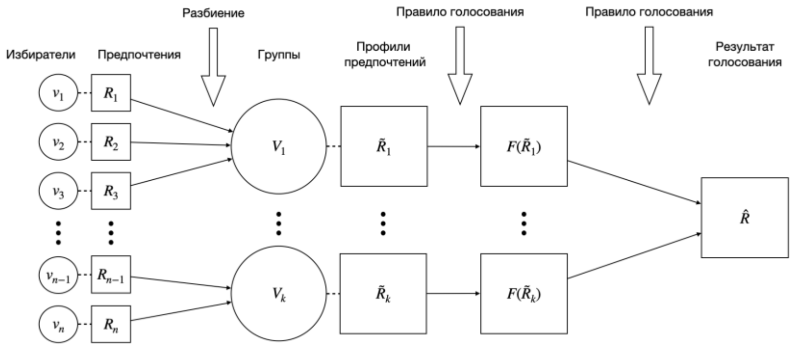

Рис. 1. Процесс голосования с разделением избирателей

3. Процесс исследования

Для исследования контроля голосования было смоделированы двухступенчатые правила Шульце и Борда для голосования в равных группах. Правила действуют следующим образом:

- Избиратели $v_1, \dots, v_n$ выражают свои предпочтения $R_1, \dots, R_n$;
- Избиратели некоторым образом делятся на k групп $V_1, \dots, V_k$ с профилями предпочтений внутри групп $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_k$. В каждой группе i выявляется результирующее предпочтение $F(\tilde{R}_i), i = 1, \dots, k$ с помощью правила Шульце\Борда.
- Предпочтения $F(\tilde{R}_1), \dots, F(\tilde{R}_k)$ обрабатываются в соответствии с правилом Шульце\Борда. Полученное результирующее предпочтение становится результатом двухступенчатого голосования $\hat{R}$.

Были смоделированы следующие стратегии деструктивного манипулирования путём разбиения на группы:

- Без разбиения: исходный профиль предпочтений избирателей R обрабатываются согласно одноступенчатому правилу голосования. Результат будем обозначать как $\hat{R}_{default} = F(R)$;
- Случайное разбиение: предпочтения избирателей случайным образом делятся на k групп $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_k$. Сначала правило голосования применяется к каждой из групп, затем – к победителям в этих группах. Результат будем обозначать как $\hat{R}_{random} = F(F(\tilde{R}_1), \dots, F(\tilde{R}_k))$;
- Распределённое разбиение: каждое нежелательное предпочтение R' помещается в разные группы; если число таких предпочтений больше, чем число групп, оставшиеся предпочтения R' снова помещаются в разные группы и т.д. Таким образом, организатор минимизирует число R' внутри одной группы. Затем проводится двухступенчатое голосование. Результат будем обозначать как $\hat{R}_d$;
- Концентрированное разбиение: все нежелательные предпочтения R' помещаются в первую группу; если число таких предпочтений больше размера группы, оставшиеся помещаются во вторую группу и т.д. Таким образом, организатор минимизирует число групп, в которых есть хотя бы одно R'. Остальные предпочтения размещаются по группам случайным образом. Затем проводится двухступенчатое голосование. Результат будем обозначать как $\hat{R}_d$.

Был проведён численный эксперимент с разбиением на равные группы в соответствии с описанными выше стратегиями при использовании двухступенчатых голосований по правилам Шульце и Борда. В численном эксперименте предпочтения избирателей были ограничены множеством строгих предпочтений. При этом результатом первого этапа голосования могли становиться нестрогие предпочтения. Результатом двухступенчатого голосования также могло стать нестрогое предпочтение.

4. Результаты

Была исследована зависимость расстояния до нежелательного результата P' от числа избирателей с предпочтением P'. Остальные избиратели при этом имеют любое другое предпочтение с равными вероятностями. Число избирателей с нежелательным предпочтением P' будем обозначать $b(P')$.

На графиках на рис. 2 показано изменение расстояния результата голосования до нежелательного предпочтения при изменении доли избирателей с таким предпочтением от 0% до 100% для случая 100 избирателей и 4 альтернатив. Избиратели делились на 5 групп разными способами.

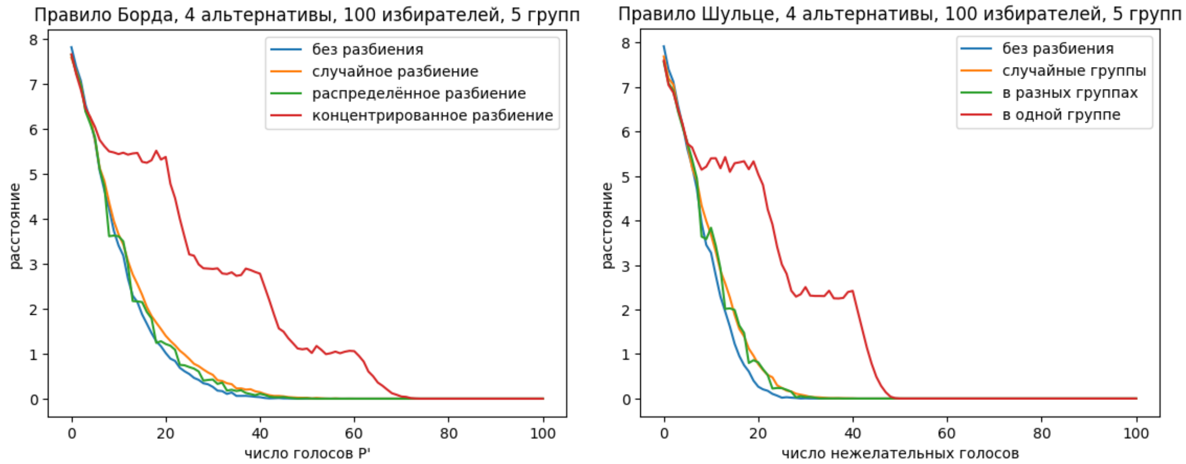

Рис. 2. Зависимость расстояния от числа нежелательных предпочтений

Результаты численного эксперимента позволяют сделать следующие выводы:

Для 4 и 5 альтернатив разбиение на группы с помощью любой из описанных стратегий позволяет отдалить результат от нежелательного предпочтения.

Стратегия манипулирования “концентрированное разбиение” намного эффективнее других описанных стратегий.

При использовании правила Борда стратегия манипулирования “концентрированное разбиение” позволяет организатору избежать нежелательного результата P' даже в том случае, когда более половины избирателей имеют предпочтение P'.

Также можно заметить, что при любом способе разбиения правило Борда, по сравнению с правилом Шульце, требует больше одинаковых предпочтений для того, чтобы это предпочтение стало однозначным результатом голосования (то есть расстояние на графиках становится равным 0).

На графиках на рис. 3 показано изменение расстояния результата голосования до нежелательного предпочтения при изменении числа групп: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100 групп. Число избирателей равно 100, из них с предпочтениями $P' - 20$.

Результаты численного эксперимента позволяют сделать следующие выводы:

Для выбранных параметров стратегия разделения “концентрированное разбиение” наиболее эффективна при разбиении на 5 групп;

Предположение: наиболее эффективно такое разделение, при котором все предпочтения P' находятся в одной группе, при этом в этой группе нет других предпочтений;

Для других стратегий разделения нет выраженного наиболее эффективного числа групп.

Чтобы проверить предположение в п.1, были проведены аналогичные численные эксперименты, с числом предпочтений P', равным 10%, при этом менялось число избирателей. Результаты оказались аналогичны описанным выше.

С целью проследить, как меняется эффективность манипулирования путём разбиения при изменении числа избирателей, были проведены численные эксперименты, в которых число избирателей менялось от 20 до 100 с шагом 5. И для метода Шульце, и для метода Борда стратегия концентрированного разбиения становится более эффективной при увеличении числа избирателей (то есть позволяет получить большее расстояние от нежелательного предпочтения до результирующего предпочтения), в то время как остальные стратегии, наоборот, становятся менее эффективными.

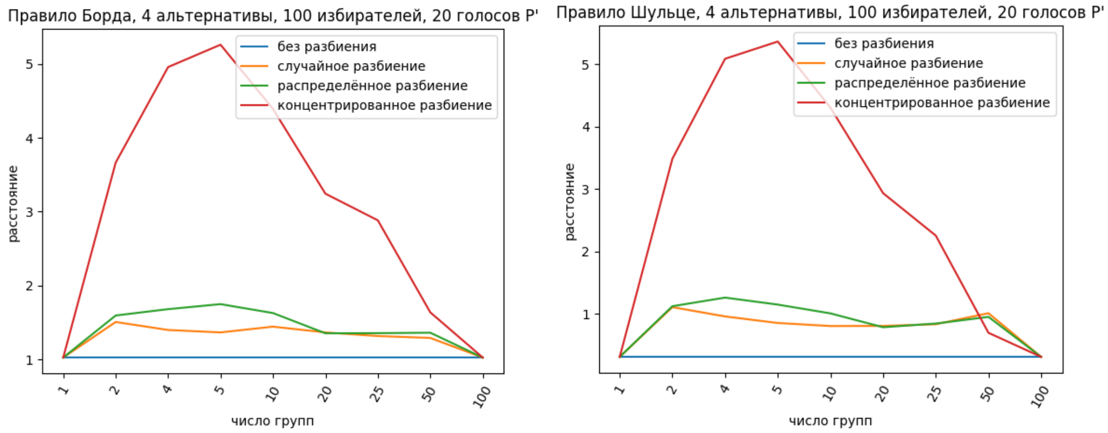

Рис. 3. Зависимость расстояния от числа групп

Стратегии разбиения также были применены к реальным данным: выборам главы Лейбористской партии, выборам главы Debian Project и оценкам учебных курсов (все данные были взяты из открытой библиотеки PrefLib [6]). Результаты подтвердили вывод о том, что стратегия “концентрированное разбиение” эффективнее других решает задачу деструктивного контроля голосования.

5. Заключение

Было проведено исследование различных правил голосования и видов манипулирования при голосовании. Было сконструировано правило голосования с разбиением избирателей на группы и предложены различные стратегии разбиением, в соответствии с которыми были проведены численные эксперименты. Результаты численных экспериментов были проверены на реальных данных. Модель, отражающая успешное манипулирование голосованием со стороны организатора, заключается в том, чтобы избиратели с нежелательным предпочтением были как можно сильнее «сконцентрированы» в группах.

Такая стратегия позволяет добиться наибольшего расстояния от нежелательного предпочтения до результата голосования. Её эффективность растёт с увеличением числа избирателей.

Кроме того, при применении стратегии концентрированного разбиения пороговая доля нежелательных предпочтений, при которых это предпочтение гарантировано становится победителем, значительно возрастает. Для метода Шульце она составляет около 50%, а для метода Борда более 60%.

Литература

1. *Эрроу К. Д.* Коллективный выбор и индивидуальные ценности / К. Д. Эрроу; Кеннет Дж. Эрроу; Пер. с англ.: [Ю. М. Яновская]. – М.: Издат. Дом ГУ ВШЭ, 2004. – (GEU). – ISBN 5-7598-0250-X. – EDN QOCIVX.
2. *Schulze M.* A new monotonic, clone-independent, reversal symmetric, and condorcet-consistent single-winner election method // Social choice and Welfare. – 2011. – Т. 36. – No. 2. – P. 267-303.
3. *Алескеров Ф. Т.* Бинарные отношения, графы и коллективные решения / Ф. Т. Алескеров, Э. Л. Хабина, Д. А. Шварц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 344 с. – ISBN 978-5-9221-1363-2. – EDN UGLGYR.
4. *Литвак Б. Г.* Экспертная информация: Методы получения и анализа – М.: Радио и связь, 1982. – 184 с.
5. *Bartholdi III J. J., Tovey C. A., Trick M. A.* How hard is it to control an election? //Mathematical and Computer Modelling. – 1992. – Т. 16. – No. 8-9. – P. 27-40.
6. PrefLib/PrefLib-Data URL: https://github.com/PrefLib/PrefLib-Data (дата обращения: 02.03.2024).