МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННОЙ СТРАТЕГИИ С РАЗРЕЖЕННОЙ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЕЙ

Горелик В.А.,
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия
gorelik@ccas.ru
Золотова Т.В.
Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, Россия
tgold11@mail.ru

Аннотация. Предлагается принцип оптимальности при принятии инвестиционных решений, основанный на оценках эффективности и риска, с разреженной ковариационной матрицей. Метод реализован в виде программы с графическим интерфейсом и продемонстрирован на реальных данных фондового рынка.

Ключевые слова: двухкритериальный подход, математическое ожидание, ковариационная матрица, инвестиционный портфель.

Введение

Задачу нахождения оптимальной инвестиционной стратегии на фондовом рынке, или портфеля ценных бумаг, по праву считают неоднозначной задачей, требующей знание и умение применять различные математические методы и инструменты. При этом для принятия инвестиционного решения необходимо провести комплекс подготовительных работ:

- анализ финансового рынка (сравнительный анализ по сегментам и отраслям рынка, направленный на выявление трендов, а также лидеров и аутсайдеров);
- анализ финансовых инструментов (технический и фундаментальный анализ, анализ ликвидности, а также расчет справедливой цены финансового инструмента);
- формирование инвестиционной стратегии (один актив или диверсификация портфеля, выбор хеджирующего инструмента и прочее).

Математические методы нахождения оптимальной инвестиционной стратегии основываются на использовании принципов векторной оптимизации [1]. Обычно рассматривается двухкритериальная задача нахождения стратегии инвестирования. При этом критериями оптимальности являются эффективность и риск инвестиционного портфеля. В качестве оценки эффективности используют математическое ожидание случайного значения доходности портфеля, а в качестве оценки риска – среднеквадратическое отклонение (СКО). К одной из возможных формализаций двухкритериальной задачи инвестирования относится постановка задачи на максимум ожидаемой доходности портфеля при ограничении сверху на СКО, которая и была использована в данной работе.

Задача инвестирования, в которой учитывается коррелированность случайных доходностей финансовых инструментов, и задача без учета коррелированности приводят к разным процедурам получения оптимального решения [2, 3]. В работе [2] анализ статистических данных показывал, что значения ковариаций доходностей рассматриваемых компаний был на порядок меньше значений их дисперсий. Учет ковариаций практически не сказывался на результатах расчетов, поэтому правомерно было допущение о том, что ими можно пренебречь. В работе [3] рассматривался пример инвестирования в акции российских компаний, в котором ковариации и дисперсии акций имеют примерно одинаковый порядок, причем ковариации являются положительными; поэтому учет ковариаций случайных значений доходностей акций имел основание.

Однако анализ статистических данных фондового рынка показывает, что взаимосвязь финансовых инструментов проявляется по-разному, и для одних эта взаимосвязь пренебрежимо мала, а для других таковой не является. В данной работе мы предлагаем подход к нахождению оптимальной инвестиционной стратегии, основанный на субоптимизации с использованием разреженной ковариационной матрицы. Такой подход оправдан, когда пересмотр состава портфеля происходит в течение короткого промежутка времени, например, в течение дня. В этом случае проведение расчетов ковариаций ценных бумаг, имеющих слабую взаимосвязь, теряет смысл, т. к. требует ненужных усилий, приводящим к потерям времени. При этом учет малых значений ковариаций может привести к погрешностям, которые при больших объемах вложений оказывают существенное влияние на структуру портфеля.

Для автоматизации аналитических подходов – при полном, частичном и без учета корреляционной зависимости – была создана программа и графический интерфейс с использованием библиотек языка программирования Python. Программный продукт апробирован на примере процесса инвестирования с реальными данными российского фондового рынка.

1. Формализация задачи инвестирования

В основе рассматриваемых моделей лежит предположение, что имеется набор активов, который описывается вектором $\bar{r} = (\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_i, \dots, \bar{r}_n)$, где $\bar{r}_i$ – ожидаемая доходность i-го финансового инструмента, и ковариационной матрицей $D = (\sigma_{ij})_{n\times n}$.

Стратегия инвестора состоит в распределении средств между активами и описывается вектором $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, где x_i – доля средств, вкладываемая в i-й финансовый инструмент. Будем рассматривать более сложную с математической точки зрения инвестиционную задачу – нахождение портфеля ценных бумаг без коротких продаж, что выражается в наличии условий неотрицательности на переменные.

СКО случайной величины выигрыша при использовании стратегии $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ определяется, очевидно, по формуле $\sigma = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{ik}\, x_i x_k\right)^{0.5}$ или в матрично-векторной форме $\sigma = \langle x, Dx\rangle^{0.5}$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ - знак скалярного произведения векторов.

Введем n-мерный вектор $e = (1, \dots, 1)$, тогда постановка задачи на максимум математического ожидания случайного значения доходности портфеля при ограничении сверху на СКО имеет вид

$$\max_{x\in P}\langle\bar{r}, x\rangle, \quad P = \{x \,|\, \langle x, Dx\rangle^{0.5} \le \sigma_0,\ \langle x, e\rangle = 1,\ x \ge 0\}. \tag{1}$$

Множество P не пусто, если пороговое значение σ_0 не меньше минимального значения СКО на множестве $P_0 = \{x \mid \langle x, e\rangle = 1,\ x \ge 0\}$. Для нахождения этого значения надо решить вспомогательную задачу квадратичного программирования:

$$d_0 = \min_{x\in P_0}\langle x, Dx\rangle, \quad P_0 = \{x \mid \langle x, e\rangle = 1,\ x \ge 0\}. \tag{2}$$

В работе [3] показано, что оптимальное значение целевой функции задачи (2) есть $d_0 = \langle\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}, \tilde{e}\rangle^{-1}$, где $\tilde{e}$ – вектор из части компонент вектора e, полученный вычеркиванием компонент с номерами, соответствующим нулевым компонентам вектора x. Кроме этого, в [3] доказана теорема, которая обосновывает метод нахождения оптимальных стратегий, содержащих не менее двух ненулевых компонент.

Теорема 1. Если $\sigma_0 > d_0^{0.5}$, все $\bar{r}_i$ различны, матрица $D = \|\sigma_{ik}\|$ положительно определена, то задача (1) имеет решение x^0 и оптимальная стратегия может быть представлена в виде

$$\tilde{x}^0 = {\lambda^0}^{-1}\widetilde{D}^{-1}(\tilde{r} - \mu^0\tilde{e}),$$

где $\lambda^0 = \sqrt{\frac{\langle\tilde{r},\widetilde{D}^{-1}\tilde{r}\rangle\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle - \langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{r}\rangle^2}{\sigma_0^2\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle - 1}}$, $\quad \mu^0 = \frac{\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{r}\rangle - \lambda^0}{\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle}$, $\widetilde{D}$ – некоторая квадратная подматрица матрицы D, полученная вычеркиванием строк и столбцов с одинаковыми номерами, $\tilde{x}^0$ – вектор из ненулевых компонент вектора p^0, $\tilde{r}$ – вектор из части компонент вектора $\bar{a}$, $\tilde{e}$ – вектор из части компонент вектора e, полученные вычеркиванием компонент с номерами, соответствующим нулевым компонентам вектора x^0.

В случае, когда учет коррелированности не осуществляется, СКО случайной величины доходности портфеля определяется, очевидно, по формуле $\sigma = \left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 x_i^2\right)^{0.5}$, и обосновать метод решения задачи (1) можно с использованием покоординатного представления (см. [2]).

2. Практическая реализация

Полученные теоретические результаты применимы для поиска инвестиционной стратегии на российском фондовом рынке. Для начала необходимо отобрать компании, соблюдающие условие диверсификации портфеля. При этом мы будем рассматривать только те компании, которые являются известными и достаточно крупными в своей отрасли. Таким образом, мы выбрали 3-4 компании из разных секторов:

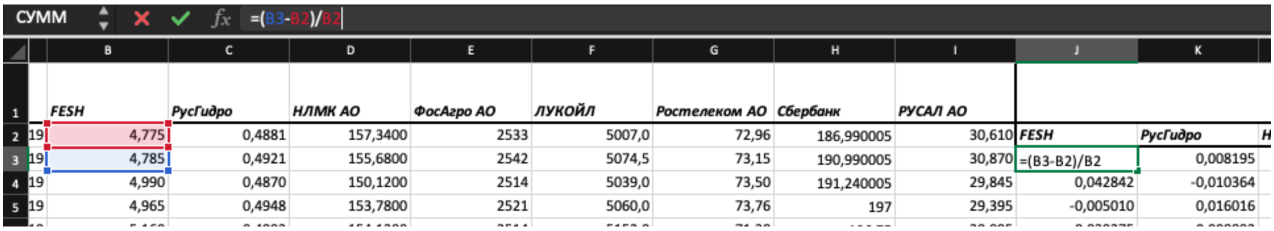
- Финансовый сектор: ВТБ, Тинькофф Банк, Сбербанк
- Связь: Ростелеком, МТС, АФК система
- Нефтяная промышленность: Газпром, Роснефть, Новатэк, Лукойл
- Обрабатывающая промышленность: ФосАгро, Акрон, Сегежа
- Несырьевые полезные ископаемые: НорНикель, Полюс Золото, Русал, НЛМК

- Электроэнергетика: Интер РАО, Русгидро, Российские Сети
- Транспорт: Аэрофлот, НМТП, Utair, Fesh

Фундаментальный анализ был проведен с использованием финансовых показателей каждой компании в каждом секторе. Фундаментальный анализ затем был использован для проведения технического анализа, чтобы понять, стоит ли покупать выбранные акции в определенный момент (01.01.2022). В результате для конкретной реализации практической части были выбраны котировки акций восьми компаний на российском фондовом рынке:

- FESH - компания морского пароходства
- РусГидро - компания коммунальных услуг
- НЛМК АО - компания по добычи стали
- ФосАгро АО - компания удобрений и сельскохозяйственных химикатов
- ЛУКОЙЛ - компания по добыче, переработке и продаже нефти
- Ростелеком АО - компания беспроводных телекоммуникаций
- Сбербанк - региональный банк
- Русал АО – компания реализует промышленные и гражданские строительные проекты.

В качестве рассматриваемых данных возьмем дневные цены закрытия соответствующих акций на периоде с 01.01.2019 по 31.12.2021 включительно. Выбор данного временного периода обуславливается полнотой данных о ценах закрытия торгов для выбранных акций. Экспорт котировок акций компаний произведен с сайта finance.yahoo.com [4]. Фрагмент данных, содержащий цены закрытия и доходности по соответствующим тикерам приведен на рис. 1. Получили вектор ожидаемых доходностей $\bar{r} = (0.00264, 0.0007, 0.00057, 0.0012, 0.00057, 0.00031, 0.00076, \ 0.00142)$, ковариационная матрица представлена в таблице 1.


СУММ =(B3-B2)/B2

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	FESH	РусГидро	НЛМК АО	ФосАгро АО	ЛУКОЙЛ	Ростелеком АО	Сбербанк	РУСАЛ АО		
2	4,775	0,4881	157,3400	2533	5007,0	72,96	186,990005	30,610	FESH	РусГидро
3	4,785	0,4921	155,6800	2542	5074,5	73,15	190,990005	30,870	=(B3-B2)/B2	0,008195
4	4,990	0,4870	150,1200	2514	5039,0	73,50	191,240005	29,845	0,042842	-0,010364
5	4,965	0,4948	153,7800	2521	5060,0	73,76	197	29,395	-0,005010	0,016016

Рис. 1. Фрагмент используемых данных

Таблица 1. Ковариационная матрица

	FESH	**РусГидро**	**НЛМК АО**	**ФосАгро АО**	**ЛУКОЙЛ**	**Ростелеком**	**Сбербанк**	**РУСАЛ АО**
FESH	0.0006800	0.0001137	0.0000837	0.0000379	0.0001189	0.0000330	0.0001100	0.0001458
РусГидро	0.000114	0.0002873	0.0000802	0.0000356	0.0001286	0.0000624	0.0001276	0.0001461
НЛМК АО	0.000084	0.0000802	0.0002890	0.0000492	0.0001228	0.0000443	0.0001126	0.0001586
ФосАгро АО	0.000038	0.0000356	0.0000492	0.0001670	0.0000297	0.0000342	0.0000263	0.0000550
ЛУКОЙЛ	0.000119	0.0001286	0.0001228	0.0000297	0.0004124	0.0000615	0.0001989	0.0001781
Ростелеком	0.000033	0.0000624	0.0000443	0.0000342	0.0000615	0.0001655	0.0000632	0.0000799
Сбербанк	0.000110	0.0001276	0.0001126	0.0000263	0.0001989	0.0000632	0.0003269	0.0001762
РУСАЛ АО	0.000146	0.0001461	0.0001586	0.0000550	0.0001781	0.0000799	0.0001762	0.0005105

Как было сказано во введении, ранее были разработаны метод построения оптимальной инвестиционной стратегии без учета ковариации доходностей (метод 1) и метод с полной ковариационной матрицей (метод 2). В ходе анализа методов решения поставленной задачи было принято объединить их в метод 3: в условии будет учитываться только значимые показатели ковариации. Таким образом метод 3 по процедуре поиска решения будет совпадать со методом 2, учитывающим ковариации, однако значимость ковариации будет определяться по количеству порядков после запятой. Например, 0.1 и 0.001 различаются на 2 ноля, что делает 0.001 не значимым числом. Появилась проблема определения значимости в случае, если числа были равны 0.01 и 0.009, однако было принято решение о том, что число не будет учитываться если в нем больше нулей после запятой чем у ковариационных моментов. В нашем примере необходимо сравнивать минимальный показатель дисперсии с каждым ковариационном моментом. Все незначимые числа, то есть которые имеют 4 знака 0 после запятой, не учитываются, т. е. равны 0. Таким образом, получаем разреженную ковариационную матрицу (таблица 2).

Так как предлагаемый метод предполагает перебор подматриц ковариационной матрицы, то в случае разреженной ковариационной матрицы D часть подматриц оказывается диагональными. Но, если некоторая квадратная подматрица $\widetilde{D}$ матрицы D диагональная, то вычисление $\widetilde{D}^{-1}$ упрощается.

Таблица 2. Разреженная ковариационная матрица

	FESH	***РусГидро***	***НЛМК АО***	***ФосАгро АО***	***ЛУКОЙЛ***	***Ростелеком***	***Сбербанк***	***РУСАЛ АО***
FESH	0.0006800	0.0001137	0.000000	0.000000	0.0001189	0.000000	0.0001100	0.0001458
РусГидро	0.000114	0.0002873	0.000000	0.000000	0.0001286	0.000000	0.0001276	0.0001461
НЛМК АО	0.000000	0.000000	0.0002890	0.000000	0.0001228	0.000000	0.0001126	0.0001586
ФосАгро АО	0.000000	0.000000	0.000000	0.0001670	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
ЛУКОЙЛ	0.000119	0.0001286	0.0001228	0.000000	0.0004124	0.000000	0.0001989	0.0001781
Ростелеком	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0001655	0.000000	0.000000
Сбербанк	0.000110	0.0001276	0.0001126	0.000000	0.0001989	0.000000	0.0003269	0.0001762
РУСАЛ АО	0.000146	0.0001461	0.0001586	0.000000	0.0001781	0.000000	0.0001762	0.0005105

Наличие условий неотрицательности в задаче (1) приводит к тому, что приходится пересчитывать несколько раз состав портфеля по формулам, меняя используемые акции (примеры таких расчетов приведены в [2, 3]). В настоящее время все чаще используются языки программирования для упрощения вычисления и графического представления проделанной работы. PyQt5 – это набор библиотек в Python, который позволяет создать графический интерфейс. Этот набор использует встроенные Python-модули, которые позволяет быстро собрать интерфейс для удобного использования.

Разработанная программа осуществляет выбор временного периода и первоначального списка акций, обработку данных, ввод определяющих параметров и проверку условий, и определяет состав оптимального портфеля инвестиций одним их трех методов (написание программ осуществлялась при участии студента Финуниверситета Масловой А.Е.).

Переходим в Python и загружаем библиотеки (рис.2).

```
import PyQt5
import sys
import numpy as np
import pandas as pd
import yfinance as yf
import scipy.stats as sps
import numpy as np
import func
import parameters
```

Рис. 2. Библиотеки в Python

После этого формируем класс, в котором начинаем строить наш интерфейс используя описанные задачи в пункте 1. Для начала создаем QHBoxLayout и QVBoxLayout, для формирования структуры вводимых данных. Так для названия и текста тикеров нужен 1 бокс, а для даты – 3, для списка методов, кнопок «по умолчанию» и «запуска» еще 1, для кнопки сброса тоже 1.

Далее создаем и размещаем атрибуты. Для каждой кнопки необходимо создать некоторую функцию. Кнопка «сброс» очищает все поля в окне. Кнопка «по умолчанию» заполняет данными из примера. Кнопка «запуск» запускает функции. Затем необходимо создать функцию ввода тикеров и дат в виде календарей, добавить текст (рис.3). Реализуем выдвижной список из методов – с учетом корреляции, без учета корреляции, комбинированный метод (рис.4).

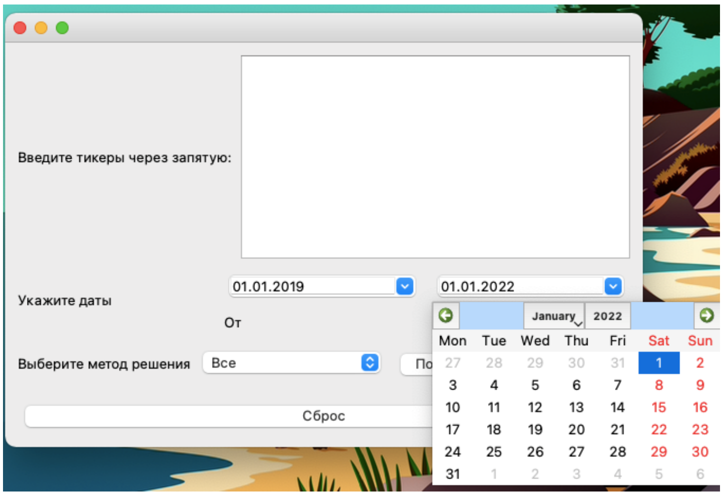


Рис. 3. Выпадающий календарь

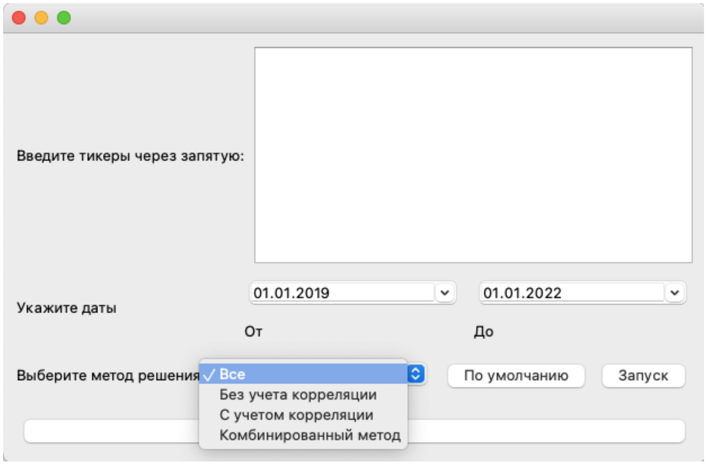


Рис. 4. Выпадающий список

Для каждого метода необходимо реализовать функцию, которая будет работать на любых тикерах за любые даты. Получаем 4 функции, которые выводят портфель минимального риска (рис. 5) с соответствующей доходностью (задача (2)) и с максимально возможным для инвестора риском σ_0 (задача (1)) отдельно для выбранного способа реализации. После их выполнения выводится следующее окно, которое содержит в себе таблицы и строку для ввода риска.

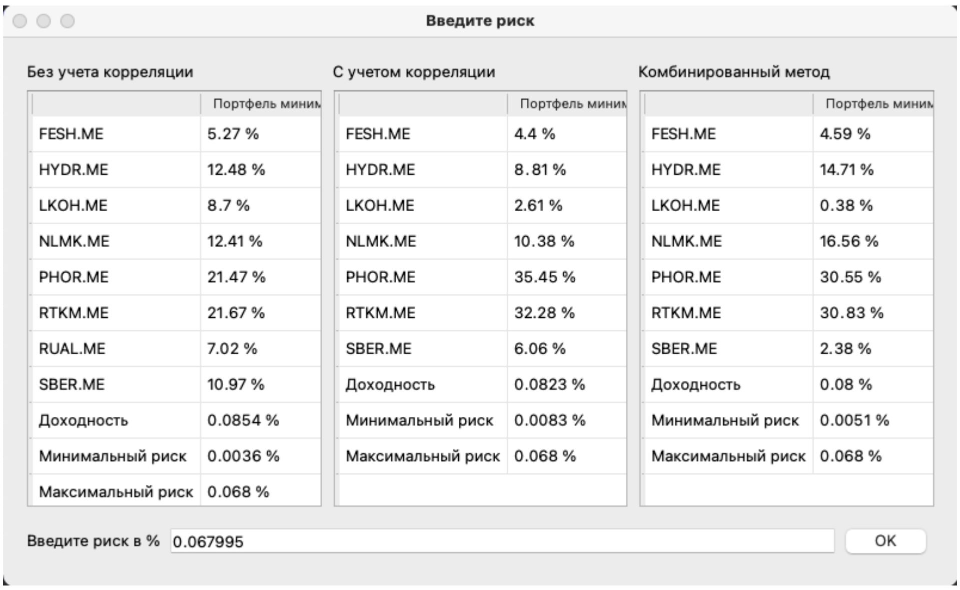
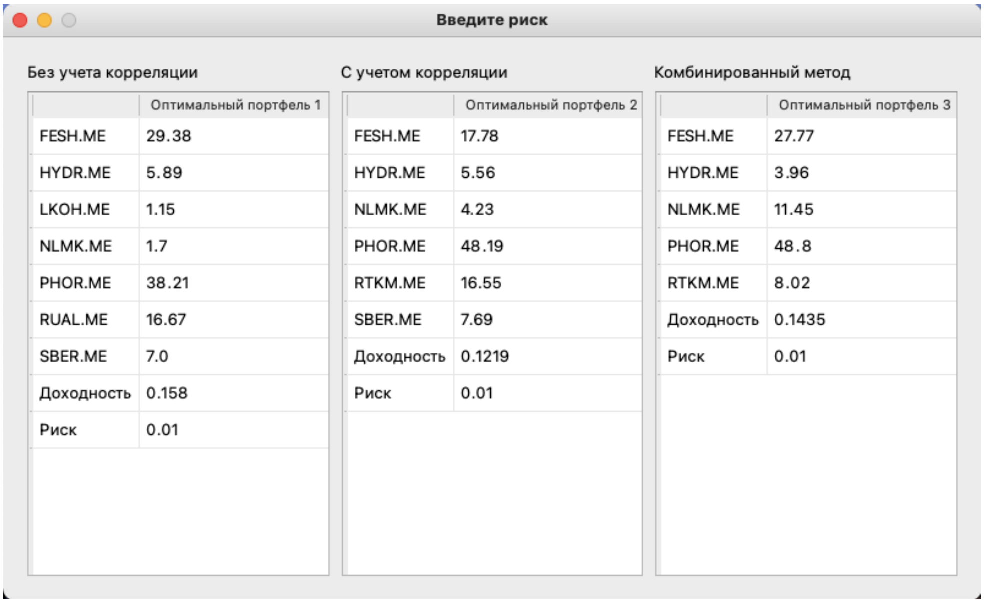


Рис. 5. Ненулевые компоненты портфеля минимального риска

При вводе параметра – значения риска σ_0 – можно ввести число в диапазоне между минимальным и максимальным риском. Далее необходимо реализовать еще три функции для трех методов: каждая из них будет считать оптимальный портфель при заданном значении риска. Однако при выборе одного из методов, риск необходимо ввести в диапазоне для этого метода, а при использовании всех трех методов риск должен быть выше максимального из минимальных рисков. Например, для риска σ_0 равного 0.01% ненулевые компоненты портфелей представлены на рис. 6.



	Оптимальный портфель 1
FESH.ME	29.38
HYDR.ME	5.89
LKOH.ME	1.15
NLMK.ME	1.7
PHOR.ME	38.21
RUAL.ME	16.67
SBER.ME	7.0
Доходность	0.158
Риск	0.01

	Оптимальный портфель 2
FESH.ME	17.78
HYDR.ME	5.56
NLMK.ME	4.23
PHOR.ME	48.19
RTKM.ME	16.55
SBER.ME	7.69
Доходность	0.1219
Риск	0.01

	Оптимальный портфель 3
FESH.ME	27.77
HYDR.ME	3.96
NLMK.ME	11.45
PHOR.ME	48.8
RTKM.ME	8.02
Доходность	0.1435
Риск	0.01

Рис. 6. Портфели с ограниченным риском

На рис. 6 представлены разные составы портфелей для одного и того же уровня риска. Для сравнения инвестиционных портфелей, полученных разными методами, были построены графики доходности и риска для трех методов (рис. 7).

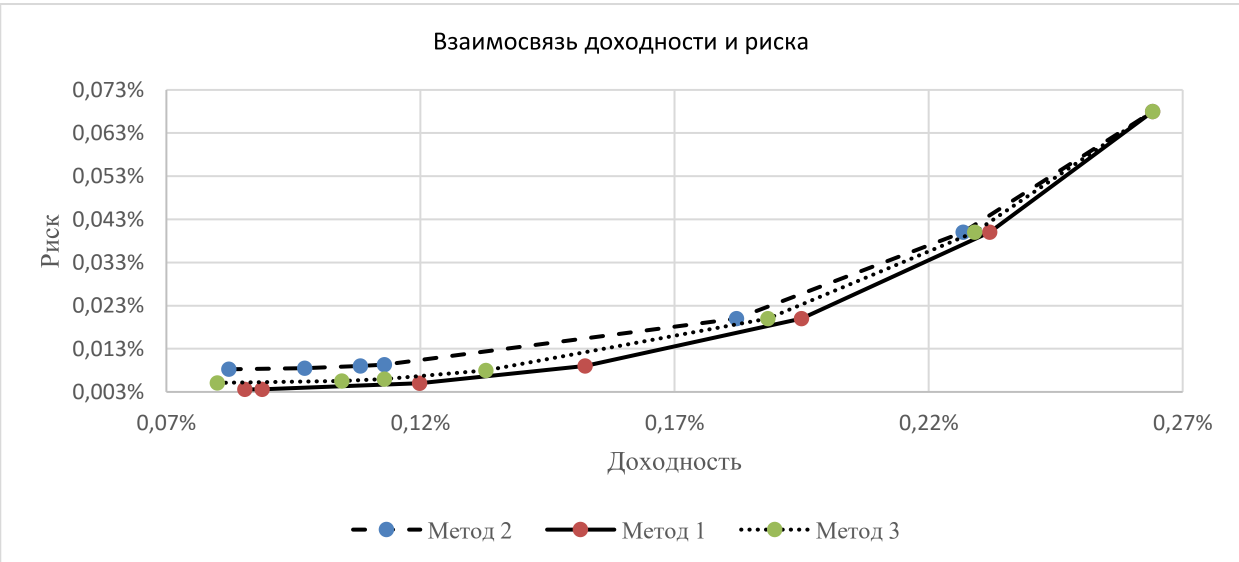


Рис. 7. График результатов использования трех методов

Можно сделать вывод, что метод 1 без учета корреляции показывает лучшую доходность при меньшем риске, однако метод с учетом корреляции контролируют диверсификацию портфеля, не позволяя даже слабо коррелированным компаниям присутствовать в портфеле, что защитит портфель в случае непредвиденного риска. Метод 3, являющийся некой комбинацией методов 1 и 2, учитывает только значимые ковариационные моменты, облегчая процедуру нахождение решения задачи (1), особенно если в краткосрочной перспективе приходится часто менять структуру портфеля.

3. Заключение

Предложенный метод с использованием разреженной ковариационной матрицы сокращает время нахождения оптимального портфеля ценных бумаг. В условиях динамично меняющегося фондового рынка такой подход является обоснованным и для активной стратегии инвестирования может привести в перспективе к лучшем результатам.

Техническая реализация предложенного метода – использование языка программирования Python для создания графического интерфейса – позволяет автоматизировать процесс построения инвестиционной стратегии.

Литература

1. *Горелик В.А.* Критерии оценки и оптимальности риска в сложных организационных системах. Научное издание / В.А. Горелик, Т.В. Золотова. – М.: ВЦ РАН, 2009. – 162 с.
2. *Gorelik V.A., Zolotova T.V.* Risk management in stochastic problems of stock investment and its Application in the Russian Stock Market // Proc. of the 13-th International Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD’2020) – Moscow, 2020. – P. 1-5.
3. *Gorelik V.A., Zolotova T.V.* Stochastic Principles of Optimality in Games with Nature and Their Application in Investment Management // Proc. of the 14-th International Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD’2021) – Moscow, 2021. – P. 1-5.
4. Finance.yahoo.com [Электронный ресурс]. URL: https://finance.yahoo.com/?guccounter=1 (дата обращения: 05.02.2022).