

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПЛАНА ТРАНСПОРТИРОВКИ РАЗНОРОДНЫХ ГРУЗОВ В БЕСПИЛОТНОЙ АВИАТРАНСПОРТНОЙ СИСТЕМЕ ПО КРИТЕРИЮ ВРЕМЕНИ

Подвесовский А.Г.,

*Брянский государственный технический университет, Брянск, Россия
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
apodv@tu-bryansk.ru*

Мещеряков Р.В., Захарова А.А.

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
mrv@ipu.ru, zaa@ipu.ru*

Аннотация. Рассмотрена задача построения плана транспортировки разнородных грузов с помощью беспилотных летательных аппаратов, обеспечивающего минимальное время транспортировки, в условиях ограничений на пропускную способность маршрутной сети. Построена оптимизационная модель, и предложена методика нахождения оптимального плана.

Ключевые слова: беспилотный летательный аппарат, транспортировка грузов, транспортная задача по критерию минимума времени, задача о многополюсной кратчайшей цепи, задача о максимальном потоке.

Введение

В настоящее время наблюдается активно растущий интерес к применению беспилотной техники в сфере грузоперевозок, в том числе к развитию практики использования для транспортировки грузов специализированных беспилотных летательных аппаратов (БЛА) [1, 2]. Одним из актуальных направлений применения беспилотной авиации в данной сфере является организация своевременной доставки грузов в труднодоступные районы, наземное сообщение с которыми носит сезонный характер либо становится невозможным вследствие возникновения чрезвычайных ситуаций или техногенных катастроф. В подобных ситуациях одним из критических факторов становится время доставки, например, если речь идет о доставке средств спасения и первой помощи.

Тем самым, актуальной проблемой является создание роботизированных беспилотных авиатранспортных систем (БАТС) для применения в сфере грузоперевозок. При этом важная роль принадлежит задачам автоматизации управления такими системами. Решение этих задач предполагает создание математического, информационного и программного обеспечения БАТС, включая системы хранения, обработки и анализа данных, средства автоматического управления, системы связи, информационно-аналитические системы и системы поддержки принятия решений [3, 4]. Здесь следует отметить, что поддержка принятия решений требуется не только на уровне управления исполнением полетных заданий, но и на уровне их оптимального планирования. Так, планирование миссии для группы БЛА, связанной с транспортировкой грузов, включает задачи построения оптимального плана транспортировки грузов, выбора БЛА с заданными характеристиками, формирования плана загрузки БЛА с учетом различных видов грузов и комплекса требований к условиям их транспортировки и др. Некоторые общие подходы к моделированию перечисленных задач обсуждались в [5].

Задача построения оптимального плана транспортировки разнородных грузов с использованием группы БЛА при ограничениях, накладываемых текущим состоянием транспортной сети, рассматривалась авторами ранее. Так, в работе [6] рассматривались ограничения, связанные с дефицитом всех или некоторых видов груза, а в работе [7] – ограничения по пропускной способности маршрутов. При этом целевые показатели для оптимизационных моделей были основаны на условиях минимизации суммарных затрат на транспортировку либо максимизации суммарного потока груза, прошедшего по сети в условиях ограниченной пропускной способности маршрутов. Вместе с тем, как отмечалось выше, во многих случаях эффективность плана транспортировки грузов должна оцениваться не суммарными издержками, а временем, затрачиваемым на его реализацию. Данная ситуация может возникнуть, например, при транспортировке скоропортящихся продуктов, либо в условиях необходимости обеспечить срочную доставку определенного груза. В этом случае план транспортировки оценивается по времени прохождения БЛА наиболее продолжительного маршрута.

В работе предлагается модель оптимизации плана транспортировки разнородных грузов с помощью БЛА с учетом требования минимизации общего времени на его выполнение. Данная модель основана на решении транспортной задачи по критерию минимума времени, однако, в отличие от существующих аналогов, рассматривает более общий класс задач – многопродуктовые транспортные задачи в сетевой постановке.

1. Общая структура модели оптимизации плана транспортировки по критерию минимума времени

Будем рассматривать задачу поиска оптимального плана транспортировки грузов между источниками (хабами) и стоками, с учетом наличия в транспортной сети промежуточных пунктов, где может выполняться как техническое обслуживание БЛА (например, зарядка аккумуляторов), так и перераспределение грузов. Задача состоит в том, чтобы определить, какие маршруты, из числа имеющихся в маршрутной сети и доступных на текущий момент с учетом ее состояния, следует задействовать для транспортировки грузов, и какое количество единиц груза каждого типа подлежит транспортировке по выбранным маршрутам, так чтобы обеспечить выполнение текущих заявок на доставку, с минимизацией времени, требуемого для выполнения транспортировки.

Введем следующие обозначения.

$\Gamma = \langle A, W \rangle$ – ориентированный граф, задающий структуру маршрутной сети, где A – множество вершин, соответствующих узлам любого типа (источники, стоки, промежуточные пункты); W – множество дуг, соответствующих коммуникациям между узлами. Отсутствие дуги между парой узлов (i, j) , означает что при текущем состоянии маршрутной сети прямой перелет БЛА из пункта i в пункт j невозможен.

Для каждого узла $i \in A$ можно выделить из множества A следующие два ассоциированных с данным узлом подмножества:

- подмножество $A_i^{IN} = \{j \in A \mid (j, i) \in W\}$, содержащее узлы, связанные дугой с узлом i ;
- подмножество $A_i^{OUT} = \{j \in A \mid (i, j) \in W\}$, содержащее узлы, с которыми связан дугой узел i .

$G = \{G_1, G_2, \dots, G_p\}$ – множество грузов, которые в общем случае являются разнородными и могут характеризоваться различными условиями транспортировки (включая допустимость либо недопустимость совместной транспортировки различных видов грузов).

$T = \{T_i^k \mid i \in A; k = 1, \dots, p\}$ – множество значений мощности узлов для каждого k -го типа груза, где мощность узла определяется следующим образом:

- если $T_i^k > 0$, то величина T_i^k характеризует запас груза G_k в i -м узле (узел является *источником* k -го груза);
- если $T_i^k < 0$, то величина $(-T_i^k)$ характеризует потребность в грузе G_k в i -м узле (узел является *стоком* k -го груза);
- если $T_i^k = 0$, то i -й узел является *транзитным* для k -го груза.

Для решения задачи поиска плана транспортировки с минимизацией времени транспортировки, в дополнение к исходным данным, описанным выше, необходимо иметь информацию о длительности перелета БЛА по каждому участку маршрутной сети. Эта информация может быть задана в виде набора $L = \{l_{ij} \mid (i, j) \in W\}$, где l_{ij} – время, затрачиваемое БЛА на перелет между пунктами i и j (данная величина может рассчитываться как сумма времени выполнения непосредственно перелета и операций, необходимых для подготовки к нему, а также после его завершения, включая операции погрузки и разгрузки).

$X = \{x_{ij}^k \mid (i, j) \in W; k = 1, \dots, p\}$, где x_{ij}^k – количество единиц груза G_k , транспортируемых по дуге (i, j) , т.е. X задает *план транспортировки грузов*.

$U = \{u_{ij} \mid (i, j) \in W\}$ – пропускные способности маршрутов, которые могут быть обусловлены, например, ограниченной грузоподъемностью используемых БЛА. При этом, в случае если пропускная способность дуги (i, j) не ограничивается, то полагаем (формально) $u_{ij} = \infty$. Можно рассмотреть подмножество $W' \subseteq W$, включающее в себя только те дуги, для которых имеется ограничение по пропускной способности: $W' = \{(i, j) \in W \mid u_{ij} < \infty\}$.

С учетом сделанных обозначений, задача оптимизации имеет следующую целевую функцию:

$$\max_{(x_{ij}^k > 0)} l_{ij} \rightarrow \min,$$

которую удобно представить, используя функцию единичного скачка E :

$$\max_{(i,j)} l_{ij} E(\max_k x_{ij}^k) \rightarrow \min, \quad (1)$$

где

$$E(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad (2)$$

а система ограничений имеет вид:

$$\begin{cases} \sum_{j \in A_i^{out}} x_{ij}^k - \sum_{j \in A_i^{in}} x_{ji}^k = T_i^k, i \in A; \\ \sum_{k=1}^p x_{ij}^k \leq u_{ij}, (i, j) \in W'; \\ x_{ij}^k \geq 0, (i, j) \in W; k = 1, \dots, p. \end{cases} \quad (3)$$

Будем считать, что система ограничений (3) является сбалансированной, т.е. выполнен набор условий

$$\sum_{i \in A} T_i^k = 0, k = 1, \dots, p, \quad (4)$$

что означает отсутствие в сети как излишков какого-либо груза, так и невозможности удовлетворения потребностей каких-либо стоков.

Целевая функция (1), очевидно, является нелинейной. В целом же оптимизационная модель (1)-(3) может рассматриваться как расширение классической однопродуктовой транспортной задачи по критерию минимума времени транспортировки на более общий случай, характеризующийся следующими свойствами:

- задача является многопродуктовой, т.е. выполняется транспортировка разнородных грузов;
- маршрутная сеть имеет произвольную структуру, и для каждого типа транспортируемого груза, наряду с источниками и стоками, могут существовать транзитные пункты;
- ограниченная пропускная способность всех или некоторых маршрутов.

Один из подходов к решению классической транспортной задачи по критерию минимума времени основан на применении метода последовательного сокращения невязок, в рамках которого решается серия вспомогательных задач о максимальном потоке [8]. Предлагаемая далее методика построения оптимального плана транспортировки основана на адаптации указанного подхода для рассматриваемого более общего случая, задаваемого моделью (1)-(3).

2. Методика построения оптимального плана транспортировки

В общем виде предлагаемую методику построения плана транспортировки множества разнородных грузов, оптимального по критерию минимума общего времени, в соответствии с моделью (1)-(3), можно представить в виде схемы на рис. 1. Основная идея здесь состоит в переходе от исходной многопродуктовой задачи в сетевой постановке к эквивалентной однопродуктовой задаче в матричной постановке. Каждый элемент формируемой матрицы определяет минимально возможное время перелета между соответствующими пунктами, исходя из заданной структуры маршрутной сети Γ и набора значений длительности перелета L . Соответствующие величины рассчитываются на этапе 1, а сам переход к эквивалентной задаче осуществляется на этапе 2. Решение полученной эквивалентной задачи сводится к итерационному решению серии взаимосвязанных задач о максимальном потоке, которое выполняется на этапах 3 и 4, и по итогам на этапе 5 формируется оптимальный план.

Рассмотрим более подробно реализацию каждого этапа.

2.1. Нахождение кратчайших цепей (этап 1)

Первый этап нахождения оптимального плана транспортировки по критерию минимума времени предполагает нахождение кратчайших цепей между всеми парами узлов маршрутной сети. Кратчайшей цепью между двумя произвольными узлами будем называть цепь, суммарное время прохождения которой минимально (т.е. эта цепь соответствует маршруту между двумя пунктами, который характеризуется минимальным временем перелета). Соответствующая задача называется задачей о многополюсной кратчайшей цепи, и для ее решения можно использовать, например, алгоритм Флойда-Уоршелла [9-10], который позволяет находить все кратчайшие цепи для сети, состоящей из n узлов, за n итераций, при этом общий объем вычислений не превышает $2n^2(n-3)$ элементарных операций (действий сложения и сравнения).

Результатами решения задачи о многополюсной кратчайшей цепи для заданной маршрутной сети A являются матрица длин кратчайших цепей $D = \|d_{ij}\|$ и матрица состава кратчайших цепей $H = \|h_{ij}\|$, где h_{ij} – номер первого промежуточного узла в кратчайшей цепи между узлами i и j ($i, j \in A$).

Поскольку мы предполагаем возможность наличия маршрутов с ограниченной пропускной способностью, то для каждой кратчайшей цепи следует дополнительно получать ее пропускную способность. В рамках данной работы будем считать, что пропускная способность цепи соответствует минимальной пропускной способности входящих в нее дуг. Таким образом, классический алгоритм

Флойда-Уоршелла следует дополнить процедурой вычисления пропускных способностей цепей. Для этого воспользуемся подходом, описанным в [11] для решения задачи о многополюсной цепи с максимальной пропускной способностью, адаптировав его к вычислению, наоборот, минимальной пропускной способности.



Рис. 1. Методика построения плана транспортировки, оптимального по критерию времени

С учетом сказанного, дополненный алгоритм включает следующие шаги.

1. Начальные значения d_{ij}^0 элементов матрицы D длин кратчайших цепей между узлами i и j задаются следующим образом:

$$d_{ij}^0 = \begin{cases} l_{ij}, & (i, j) \in W; \\ 0, & i = j; \\ \infty, & i \neq j, (i, j) \notin W, \end{cases}$$

а начальные значения элементов матрицы H состава кратчайших цепей задаются имеют вид $h_{ij}^0 = j$ ($i, j \in A$). Помимо этого, вводится матрица пропускных способностей кратчайших цепей $C = \|c_{ij}\|$, начальные значения элементов которой полагаются равными $c_{ij}^0 = u_{ij}$ ($i, j \in A$).

2. Узлам маршрутной сети присваиваются номера от 1 до n , и далее для каждого узла $s = 1, \dots, n$, выполняются следующие операции:

2а) проверка того, является ли цепь, последовательно соединяющая узлы i, s, j , более короткой, чем найденная на предыдущей итерации кратчайшая цепь между узлами i, j , и корректировка длины кратчайшей цепи в случае положительного результата данной проверки:

$$d_{ij}^s = \min(d_{ij}^{s-1}, d_{is}^{s-1} + d_{sj}^{s-1}), i, j = 1, \dots, n; i \neq s \neq j;$$

2б) замена элементов в матрице состава кратчайших цепей при изменении длины кратчайшей цепи:

$$h_{ij}^s = \begin{cases} s, d_{ij}^{s-1} > d_{is}^{s-1} + d_{sj}^{s-1}; \\ h_{ij}^{s-1}, d_{ij}^{s-1} \leq d_{is}^{s-1} + d_{sj}^{s-1}; \end{cases}$$

2в) корректировка пропускной способности новой цепи в случае вхождения в нее новых звеньев с меньшей пропускной способностью:

$$c_{ij}^s = \begin{cases} \min(c_{ij}^{s-1}, c_{is}^{s-1}, c_{sj}^{s-1}), d_{ij}^{s-1} > d_{is}^{s-1} + d_{sj}^{s-1}; \\ c_{ij}^{s-1}, d_{ij}^{s-1} \leq d_{is}^{s-1} + d_{sj}^{s-1}. \end{cases}$$

2.2. Переход к эквивалентной оптимизационной задаче в матричной постановке (этап 2)

Данный этап в рамках предлагаемой методики является ключевым и реализуется с помощью следующей последовательности шагов.

1. Каждый узел маршрутной сети $i \in A$ заменяется эквивалентным подмножеством узлов $A_i = \{A_i^1, A_i^2, \dots, A_i^p\}$, где A_i^k – узел A_i , ассоциированный с грузом k -го вида. Здесь и далее $k = 1, \dots, p$.

2. Формируются множества источников и стоков эквивалентной задачи. Обозначим через S^k множество узлов, являющихся источниками k -го вида груза, т.е. узлов, для которых $T_i^k > 0$, а через Q^k обозначим множество узлов, являющихся стоками k -го вида груза, т.е. узлов, для которых $T_i^k < 0$. Также через s_k обозначим число элементов множества S^k , а через q_k – число элементов множества Q^k . Таким образом, множество S источников и множество Q стоков эквивалентной задачи представляют собой объединения соответствующих множеств по всем видам груза: $S = S^1 \cup S^2 \cup \dots \cup S^p$; $Q = Q^1 \cup Q^2 \cup \dots \cup Q^p$.

3. Задаются мощности сформированных источников и стоков эквивалентной задачи. Мощности источников определяются в соответствии с правилом

$$S_i^k = T_i^k (A_i^k \in S^k; k = 1, \dots, p),$$

а мощности стоков – в соответствии с правилом

$$Q_j^k = -T_j^k (A_j^k \in Q^k; k = 1, \dots, p).$$

Очевидно, что в предположении справедливости условия (4), полученная система источников и стоков является сбалансированной по мощности, т.е. выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{s_k} S_i^k = \sum_{j=1}^{q_k} Q_j^k (k = 1, \dots, p).$$

4. Формируется матрица V длительностей маршрутов между узлами:

$$V = \|V(A_i^k, A_j^m)\| (A_i^k \in S^k; A_j^m \in Q^m; k, m = 1, \dots, p),$$

где

$$V(A_i^k, A_j^m) = \begin{cases} d_{ij}, k = m; \\ \infty, k \neq m, \end{cases}$$

где, в свою очередь, d_{ij} – найденные на этапе 1 (раздел 2.1) длины кратчайших цепей между соответствующими парами узлов. Иными словами, в матрице V элемент $V(A_i^k, A_j^m)$ определяет минимальную длительность маршрута из пункта i в пункт j , ассоциированную с транспортировкой груза G^k . Если ввести обозначение $v_{ij}^k = V(A_i^k, A_j^k)$, то общую структуру эквивалентной оптимизационной задачи в матричной постановке можно представить в виде таблицы 1. Матрица V соответствует затененной части данной таблицы.

Таким образом, матрица V имеет блочно-диагональную структуру, при этом количество блоков равно количеству p видов грузов, предназначенных для транспортировки. Отметим, что необходимость введения отдельного блока для каждого груза обусловлена наличием ограничений, связанных с пропускной способностью маршрутов и задающих верхнюю границу суммарного объема всех видов груза перевозимых по нему.

Таблица 1. Общая структура оптимизационной задачи в матричной постановке

	Стоки груза G^1	...	Стоки груза G^k	...	Стоки груза G^p	Мощности источников
Источники груза G^1	v_{11}^1 v_{12}^1 ... $v_{1q_1}^1$ v_{21}^1 v_{22}^1 ... $v_{2q_1}^1$ \vdots \vdots \ddots \vdots $v_{s_1 1}^1$ $v_{s_1 2}^1$... $v_{s_1 q_1}^1$		∞			S_1^1 S_2^1 \vdots $S_{s_1}^1$
...		
Источники груза G^k	∞		v_{11}^k v_{12}^k ... $v_{1q_k}^k$ v_{21}^k v_{22}^k ... $v_{2q_k}^k$ \vdots \vdots \ddots \vdots $v_{s_k 1}^k$ $v_{s_k 2}^k$... $v_{s_k q_k}^k$		∞	S_1^k S_2^k \vdots $S_{s_k}^k$
...		
Источники груза G^p	∞				v_{11}^p v_{12}^p ... $v_{1q_p}^p$ v_{21}^p v_{22}^p ... $v_{2q_p}^p$ \vdots \vdots \ddots \vdots $v_{s_p 1}^p$ $v_{s_p 2}^p$... $v_{s_p q_p}^p$	S_1^p S_2^p \vdots $S_{s_p}^p$
Мощности стоков	Q_1^1 Q_2^1 ... $Q_{q_1}^1$...	Q_1^k Q_2^k ... $Q_{q_k}^k$...	Q_1^p Q_2^p ... $Q_{q_1}^p$	

2.3. Решение серии задач о максимальном потоке (этапы 3-4)

После выполнения всех шагов этапа 2, описанных в разделе 2.2 и получения матрицы V можно перейти к решению исходной задачи оптимизации плана транспортировки грузов по критерию минимального времени. Целевая функция данной задачи имеет вид (1), а система ограничений представлена в виде (3).

Рассмотрим способ представления задачи в виде серии связанных задач о максимальном потоке. Данный способ использует основные идеи метода, описанного в [8], однако, он адаптирован для рассматриваемого случая многопродуктовой задачи. В основе способа лежит эвристический алгоритм, которые предполагает выполнение следующих шагов.

1. Преобразование матрицы V . Как следует из предыдущего изложения, элементы v_{ij}^k данной матрицы, отличные от бесконечности, определяют минимальное время, за которое можно осуществить доставку k -го груза из пункта i в пункт j . Преобразование матрицы выполняется путем выполнения следующих действий.

1а) В каждой строке и каждом столбце матрицы V определяется минимальный элемент, и среди найденных минимальных элементов выбирается максимальный, который обозначим v_0 . Очевидно, что за время, меньшее, чем v_0 , транспортировку грузов осуществить невозможно. Действительно, все строки матрицы V соответствуют пунктам, имеющим запас некоторого груза, а все столбцы – пунктам, имеющим потребность в некотором грузе. Поэтому любой план транспортировки будет обязательно включать в себя хотя бы один элемент строки, содержащей v_0 , и хотя бы один элемент столбца, содержащего v_0 , а значения длительности маршрутов, соответствующие этим элементам, по определению не меньше v_0 .

1б) Все элементы матрицы V , меньшие либо равные v_0 , заменяются нулями:

$$\widetilde{v}_{ij}^k = \begin{cases} 0, & v_{ij}^k \leq v_0; \\ v_{ij}^k, & v_{ij}^k > v_0. \end{cases}$$

2. Для полученной матрицы $\widetilde{V} = \|\widetilde{v}_{ij}^k\|$ решается задача о максимальном потоке, в которой допустимыми для транспортировки маршрутами считаются те, которые соответствуют нулевым элементам матрицы. Таким образом, строится целевая функция

$$H = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^{s_k} \sum_{j=1}^{q_k} \left(1 - E(\widetilde{v}_{ij}^k)\right) z_{ij}^k \rightarrow \max, \quad (5)$$

где E – функция единичного скачка (2), а система ограничений имеет вид:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{q_k} z_{ij}^k \leq S_i^k, i = 1, \dots, s_k; k = 1, \dots, p; \\ \sum_{i=1}^{s_k} z_{ij}^k \leq Q_j^k, j = 1, \dots, q_k; k = 1, \dots, p; \\ \sum_{k=1}^p z_{ij}^k \leq c_{ij}, A_i^k \in S^k; A_j^m \in Q^m; \\ x_{ij}^k \geq 0, (i^k, j^k) \in W_E; k = 1, \dots, p. \end{cases} \quad (6)$$

В задаче (5)-(6) переменные z_{ij}^k задают количество единиц k -го груза, подлежащего транспортировке из пункта i в пункт j по маршруту минимально возможной длительности (при этом данные пункты не обязательно являются смежными в исходной маршрутной сети Γ). Третье неравенство в системе ограничений (6) задает набор ограничений по пропускной способности маршрутов, значения c_{ij} берутся из найденной на этапе 1 матрицы пропускных способностей S .

Методы решения задачи о максимальном потоке известны и описаны, например, в [10].

3. Если в результате решения задачи (5)-(6) окажется, что удовлетворены потребности всех стоков во всех видах груза, т.е.

$$\sum_{i=1}^{s_k} \sum_{j=1}^{q_k} z_{ij}^k = \sum_{j=1}^{q_k} Q_j^k, k = 1, \dots, p, \quad (7)$$

то план транспортировки за минимальное время найден, поскольку, исходя из построения оптимизационной модели, для всех i, j, k имеет место $v_{ij}^k \leq v_0$, при этом не существует плана транспортировки, в котором максимальная длительность маршрута по времени меньше, чем v_0 .

Если соотношение (7) не выполняется (левая сумма строго меньше правой), т.е. не все потребности удовлетворены, то это означает, что за время v_0 транспортировку всех имеющихся грузов осуществить невозможно, и необходимо искать новый план, предварительно увеличив нижнюю границу максимального времени транспортировки.

Для этого среди ненулевых элементов матрицы \tilde{V} ищется наименьший элемент, который обозначим v_1 , и он заменяется нулем. Если таких элементов несколько, то они обнуляются все. Далее происходит проверка, есть ли среди вновь появившихся нулевых элементов открытые позиции.

Позицию элемента v_{ij}^k будем называть открытой, если выполняется соотношение

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^{q_k} z_{i\beta}^k < S_i^k; \\ \sum_{\alpha=1}^{s_k} z_{\alpha j}^k < Q_j^k, \end{cases}$$

т.е. имеется неудовлетворенная потребность в k -м грузе j -го стока, которая может быть обеспечена за счет не реализованного запаса данного груза в i -м источнике. Иначе будем называть позицию элемента v_{ij}^k закрытой.

Если все вновь появившиеся нулевые элементы находятся в закрытых позициях, то появившиеся таким образом разрешенные маршруты не смогут увеличить найденный в результате решения задачи (5)-(6) максимальный поток, и поэтому за время v_1 транспортировку всех имеющихся грузов по-прежнему осуществить невозможно. В этом случае последовательно перебираются все наименьшие из ненулевых элементов матрицы \tilde{V} , которые заменяются нулями, до тех пор, пока очередной наименьший элемент v_t не окажется в открытой позиции. Это дает возможность, после обнуления элемента v_t и всех равных ему, вновь решить задачу о максимальном потоке (5)-(6) и проверить выполнение условия (7).

Очевидно, что каждый новый наименьший элемент v_t увеличивает число нулевых элементов матрицы \tilde{V} , поэтому за конечное число шагов условие (7) будет выполнено, вследствие сбалансированности построенной эквивалентной системы источников и стоков. Более точно, это произойдет заведомо не позже, чем все элементы матрицы \tilde{V} обратятся в нули.

4. Как было отмечено выше, выполнение условия (7) означает, что найден план транспортировки, время реализации которого не превышает v_t , при этом за время, меньшее v_t , транспортировку всего груза осуществить невозможно. Таким образом, данный план является оптимальным по критерию минимума времени.

2.4. Формирование плана транспортировки (этап 5)

Пусть элементы найденного оптимального плана имеют вид $(z_{ij}^k)^*$. Фактически это означает предписание о транспортировке $(z_{ij}^k)^*$ единиц k -го груза из пункта i (имеющего запас данного груза) в пункт j (имеющий потребность в нем). Для всех таких элементов необходимо восстановить

оптимальные маршруты транспортировки, которые соответствуют кратчайшим цепям между пунктами, найденным в результате решения задачи о многополюсной кратчайшей цепи для соответствующего вида груза (этап 1). Для этого используются матрицы состава кратчайших цепей H .

Более конкретно, маршрут из пункта i в пункт j , соответствующий кратчайшей цепи между ними, имеет вид $M_{ij} = (m_1, m_2, \dots, m_l)$, где $m_1 = i$; $m_{r+1} = h_{m_r, j}$ ($r = 1, \dots, l - 1$); l определяется из условия $h_{m_{l-1}, j} = j$.

3. Пример построения плана транспортировки

Применение предложенной методики построения плана транспортировки по критерию минимума времени рассмотрим на примере маршрутной сети, схематически представленной на рис. 2. Требуется осуществить транспортировку грузов двух типов, G_1, G_2 , из пунктов, где имеется запас (1, 2, 5) в пункты, где имеется потребность (5, 6 для G_1 и 3, 5, 6 для G_2), за минимально возможное время. Величины запасов и потребностей в различных пунктах указаны на рис. 2. Несложно убедиться, что условие сбалансированности (4) выполняется, и весь груз, находящийся в источниках, может быть распределен между стоками, с удовлетворением потребности каждого из них в обоих видах груза.

Каждая дуга графа маршрутной сети на рис. 2 помечена значением l_{ij} времени перелета (в условных единицах) между соответствующими пунктами i и j . Для простоты будем считать, что пропускная способность u_{ij} всех дуг одинакова и равна 30, что соответствует максимальному количеству единиц груза, допустимому для транспортировки по любому маршруту. Опишем результаты реализации этапов построения оптимального плана транспортировки.

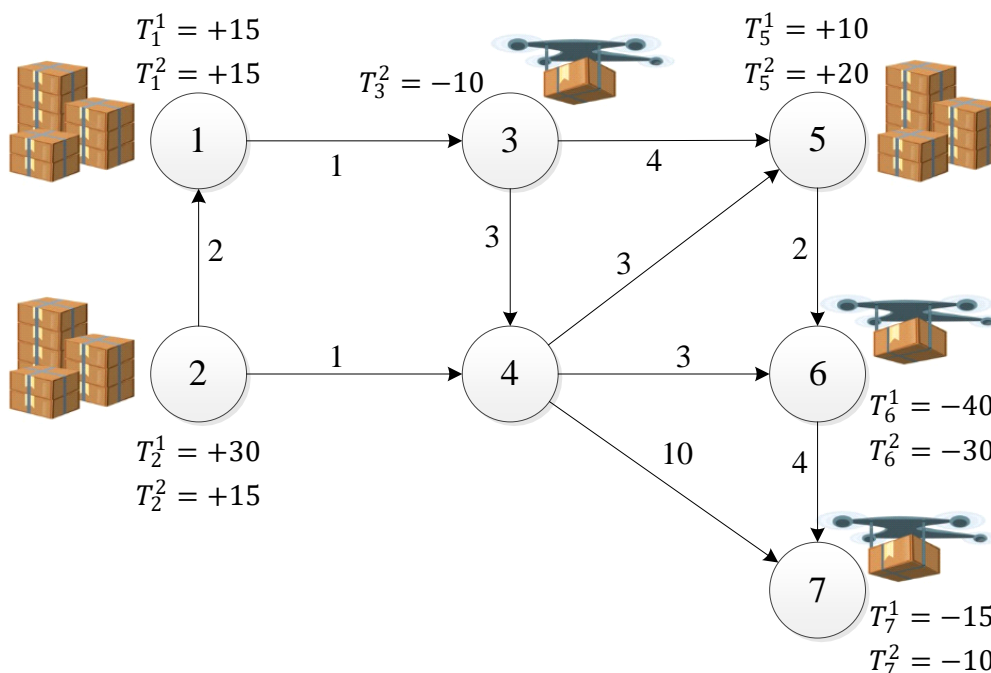


Рис. 2. Пример маршрутной сети

1. *Нахождение кратчайших цепей.* В результате применения алгоритма Флойда-Уоршелла к рассматриваемой маршрутной сети получены следующие матрицы длин кратчайших цепей D и матрицы состава кратчайших цепей H :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 & 4 & 5 & 7 & 11 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 & 4 & 8 \\ \infty & \infty & 0 & 3 & 4 & 6 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 3 & 3 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 2 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

С учетом сделанного предположения об одинаковой пропускной способности всех дуг, пропускные способности всех цепей будут также одинаковыми, т.е. $c_{ij} = 30$ ($i, j = 1, \dots, 7$).

2. *Переход к эквивалентной задаче в матричной постановке.* Выполнение шагов, описанных в разделе 2.2, с учетом данных, представленных на рис. 1, и полученной матрицы D , приводит к эквивалентной оптимизационной задаче в матричной постановке, структура которой представлена в виде таблицы 2.

Таблица 2. Структура эквивалентной оптимизационной задачи в матричной постановке

		Стоки груза G_1		Стоки груза G_2			Мощности источников S_i^k
		6	7	3	6	7	
Источники груза G_1	1	7	11	∞			15
	2	4	8				30
	5	2	6				10
Источники груза G_2	1	∞		1	7	11	15
	2			3	4	8	15
	5			∞	2	6	20
Мощности стоков Q_j^k		40	15	10	30	10	

3. *Решение задач о максимальном потоке.* Выполнение шагов алгоритма, описанного в разделе 2.3, приводит к следующим результатам.

Нахождение минимальных значений по строкам и столбцам полученной матрицы V (затененная часть таблицы 2) и выбор из них максимального позволяет установить, что минимально потенциально возможное время выполнения плана транспортировки, равное $v_0 = 7$. Таким образом, преобразованная матрица длительностей перелета имеет вид

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} 0 & 11 & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 8 & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 0 & 11 \\ \infty & \infty & 0 & 0 & 8 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для найденного значения v_0 и матрицы V' , с учетом заданных пороговых значений пропускной способности c_{ij} , решается задача о максимальном потоке (5)-(6). Полученный на основе ее решения план транспортировки показан таблице 3. Также в таблице 3 приведены значения фактических объемов каждого вида груза, вышедших из источников и доставленных в стоки в результате реализации плана транспортировки за время, равное v_0 .

Таблица 3. План транспортировки для $v_0 = 7$ и $c_{ij} = 30$

		Стоки груза G_1		Стоки груза G_2			Фактически вышедший объем груза
		6	7	3	6	7	
Источники груза G_1	1	15	0	0			15
	2	25	0				25
	5	0	10				10
Источники груза G_2	1	0		0	15	0	15
	2			10	5	0	15
	5			0	10	10	20
Фактически доставленный объем груза		40	10	10	30	10	

Из таблицы 3 видно, что в результате реализации найденного плана транспортировки потребность пункта 7 в грузе G_1 удовлетворена не полностью, при этом она может быть удовлетворена за счет запаса этого груза, оставшегося в пункте 2. В соответствии с п. 3 алгоритма, в матрице \tilde{V} определяется минимальный элемент, который равен $v_1 = 8$. Одно из вхождений данного элемента, на пересечении 2-й строки и 2-го столбца матрицы \tilde{V} , находится в открытой позиции (и оно соответствует транспортировке груза из пункта 2 в пункт 7). Таким образом, все вхождения указанного элемента в матрице \tilde{V} заменяются нулями, в результате чего получается матрица

$$\tilde{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 11 & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 0 & 11 \\ \infty & \infty & 0 & 0 & 0 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и для нее вновь решается задача о максимальном потоке вида (5)-(6). Результат решения показан в таблице 4.

Таблица 4. План транспортировки для $v_1 = 8$ и $c_{ij} = 30$

		Стоки груза G_1		Стоки груза G_2			Фактически вышедший объем груза
		6	7	3	6	7	
Источники груза G_1	1	15	0	0			15
	2	15	15				30
	5	10	0				10
Источники груза G_2	1	0		5	10	0	15
	2			5	0	10	15
	5			0	20	0	20
Фактически доставленный объем груза		40	15	10	30	10	

Таким образом, полученный план позволяет осуществить транспортировку грузов с удовлетворением потребностей всех стоков за минимальное время, равное 8 условных единиц. При этом, как следует из таблицы 4, суммарный объем груза, подлежащего транспортировке между пунктами 5 и 6 составляет 30 единиц, что соответствует верхнему пороговому значению пропускной способности.

Уменьшим верхнюю границу пропускной способности маршрутов с 30 до 25. В этом случае решение задачи о максимальном потоке дает план транспортировки, показанный в таблице 5. Этот план, очевидно, отличается от найденного ранее, но при этом не приводит к появлению стоков с неудовлетворенными потребностями, таким образом он также обеспечивает транспортировку груза за минимальное время, равное 8 условных единиц.

Таблица 5. План транспортировки для $v_1 = 8$ и $c_{ij} = 25$

		Стоки груза G_1		Стоки груза G_2			Фактически вышедший объем груза
		6	7	3	6	7	
Источники груза G_1	1	15	0	0			15
	2	15	15				30
	5	10	0				10
Источники груза G_2	1	0		10	5	0	15
	2			0	10	5	15
	5			0	15	5	20
Фактически доставленный объем груза		40	15	10	30	10	

4. *Формирование итогового плана транспортировки.* Итоговый план транспортировки может быть получен на основе данных таблиц 4 или 5 с использованием найденной ранее матрицы состава кратчайших путей H . Например, для плана, представленного в таблице 5, маршрут транспортировки 15 единиц груза G_1 и 5 единиц груза G_2 из пункта 2 в пункт 7 определяется следующим образом: $M_{27} = (2, h_{27} = 4, h_{47} = 6, h_{67} = 7)$. Итоговый план транспортировки, полученный для данных таблицы 5, с указанием количества единиц каждого вида груза, транспортируемого из пункта i в пункт j , а также маршрута транспортировки представлен в таблице 6.

Таблица 6. Итоговый план транспортировки для $v_1 = 8$ и $c_{ij} = 25$

СТОКИ ИСТОЧНИКИ	3	6	7
1	$x_{13}^2 = 10,$ $M_{13} = (1, 3)$	$x_{16}^1 = 15, x_{16}^2 = 5,$ $M_{16} = (1, 3, 4, 6)$	
2		$x_{26}^1 = 15, x_{26}^2 = 10,$ $M_{26} = (2, 4, 6)$	$x_{27}^1 = 15, x_{27}^2 = 5,$ $M_{27} = (2, 4, 6, 7)$
5		$x_{56}^1 = 10, x_{56}^2 = 15,$ $M_{56} = (5, 6)$	$x_{57}^2 = 5,$ $M_{57} = (5, 6, 7)$

4. Заключение

Рассмотрена задача построения оптимального плана транспортировки разнородных грузов с использованием группы БЛА в маршрутной сети при ограничениях на пропускную способность маршрутов. В качестве показателя оптимальности рассматривалось минимальное время реализации плана. Построена модель, основанная на представлении данной задачи в виде многопродуктовой транспортной задачи в сетевой постановке по критерию минимума времени, для которой предложена методика построения оптимального плана. Основными этапами построения являются: нахождение маршрутов минимальной длительности между всеми парами узлов маршрутной сети, путем решения задачи о многополюсной кратчайшей цепи; сведение исходной задачи в сетевой постановке к эквивалентной задаче в матричной постановке; решении серии задач о максимальном потоке для последовательно подбираемых значений минимально возможного времени транспортировки. Показан пример применения предложенной методики для решения тестовой задачи.

Укажем некоторые возможные пути совершенствования и развития предложенной модели.

1. Учет условий транспортировки грузов различных типов, а также ограничений по совместимости определенных типов грузов (возможности их транспортировки в одном транспортном средстве). В этом случае потенциально возможна ситуация, когда пропускная способность участков маршрутной сети будет различной для разных типов груза, вплоть до запрета транспортировки отдельных видов груза по некоторым маршрутам. Это приведет к необходимости решения задачи о многополюсной кратчайшей цепи отдельно для каждого подмножества, содержащего грузы с одинаковыми условиями транспортировки, и, соответственно, неоднородности структуры и состава блоков матрицы V . Как следствие, для грузов с разными условиями транспортировки маршруты могут различаться даже при совпадении начальных и конечных пунктов.

2. Наличие зависимости между пропускной способностью участка маршрутной сети и временем перелета по данному участку. Подобная ситуация может возникать в тех случаях, когда по одному и тому же маршруту возможна транспортировка груза с использованием нескольких вариантов БЛА, различающихся по характеристикам, таким как, в первую очередь, грузоподъемность, а также скорость и дальность полета, емкость аккумулятора и т.д. Учет описанной ситуации приведет к необходимости включения в формальную модель маршрутной сети альтернативных маршрутов между узлами, различающихся по параметрам l_{ij} и u_{ij} .

3. Обработка ситуаций, когда вследствие ограниченной пропускной способности маршрутной сети (которая, в частности, может быть обусловлена недостаточностью ресурса БЛА, доступного для транспортировки грузов), доставку всех требуемых грузов в рамках одного полетного задания осуществить невозможно. В этом случае необходимо рассматривать некоторую форму компромисса между временем выполнения полетного задания и полной обеспеченности стоков необходимыми им грузами. Один из возможных механизмов учета подобного компромисса связан с построением модели предпочтений, учитывающей приоритетность доставки определенного груза в те или иные стоки или, наоборот, приоритетность обеспечения определенного стока грузами различных видов. Подобная задача рассматривалась авторами в [6, 7] применительно к оптимизации по критерию минимума затрат, и, таким образом, целесообразна адаптация предложенных там подходов к задаче оптимизации по критерию минимума времени.

4. Рост числа узлов маршрутной сети и количества типов грузов, особенно в случае разнородности условий транспортировки и наличия зависимости между пропускной способностью участка маршрутной и временем его прохождения, приводит к значительному повышению размерности оптимизационной задачи. Применение классических методов решения задач о максимальном потоке в этом случае может быть связано с определенными сложностями вычислительного характера. Тем самым, требуется разработка эвристических методов оптимизации, позволяющих найти близкое к

оптимальному решению за приемлемое время. В качестве основы здесь можно использовать генетические либо другие эволюционные алгоритмы оптимизации [12].

Исследование перечисленных задач и разработка подходов к их решению составляют предмет дальнейшей работы.

Литература

1. *Матюха С.В.* Беспилотные авиационные системы в грузоперевозках // Транспортное дело России. 2022. № 1. – С. 141-143. doi: 10.52375/20728689_2022_1_141.
2. *Воронов В.В.* Беспилотные авиасистемы для грузоперевозок: возможности и перспективы [Электронный ресурс] // Авиатранспортное обозрение. Деловой авиационный портал. Режим доступа: <http://www.ato.ru/content/bespilotnye-aviasistemy-dlya-gruzoperevozok-vozmozhnosti-i-perspektivy-1-ya-chast> (часть 1), <http://www.ato.ru/content/bespilotnye-aviasistemy-dlya-gruzoperevozok-ocenka-razrabotok-chast-2> (часть 2).
3. *Кутахов В.П., Смолин А.Л., Настас Г.Н.* К вопросу о создании беспилотной авиационной транспортной системы // Скоростной транспорт будущего: перспективы, проблемы, решения: сб. докл. 1-й Междунар. науч.-техн. конф. – М.: Изд-во «Перо», 2022. – С. 177-180.
4. *Попов А.П., Смолин А.Л., Титов А.Е.* Подходы к моделированию элементов цикла применения транспортных беспилотных летательных аппаратов // Беспилотная авиация: состояние и перспективы развития: сб. статей II Всеросс. науч.-практ. конф. – Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», 2020. – С. 132-137.
5. *Захарова А.А., Кутахов В.П., Мещеряков Р.В., Подвесовский А.Г., Смолин А.Л.* Моделирование задач транспортировки грузов в беспилотной авиатранспортной системе // Авиакосмическое приборостроение. 2023. № 3. – С. 3-15. doi: 10.25791/aviakosmos.3.2023.1326.
6. *Zakharova A., Podvesovskii A.* Model for Optimization of Heterogeneous Cargo Transportation Using UAVs, Taking into Account the Priority of Delivery Tasks // Agriculture Digitalization and Organic Production. Smart Innovation, Systems and Technologies, Vol 362. – Springer, Singapore, 2023. – pp. 257-268. doi: 10.1007/978-981-99-4165-0_24.
7. *Подвесовский А.Г., Захарова А.А.* Транспортировка разнородных грузов с помощью беспилотных летательных аппаратов в условиях ограничений по пропускной способности маршрутной сети // Перспективные системы и задачи управления: матер. XIX Всеросс. науч.-практ. конф. – Таганрог: ДиректСайнс, 2024. – С. 183-188.
8. *Триус Е.Б.* Задачи математического программирования транспортного типа. – М.: Советское радио, 1967. – 208 с.
9. *Грешиллов А.А.* Математические методы принятия решений. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 584 с.
10. *Корте Б., Фиген Й.* Комбинаторная оптимизация. Теория и алгоритмы / Пер. с англ. М. А. Бабенко. – М.: МЦНМО, 2015. – 720 с.
11. *Ху Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях / пер. с англ. И.Л. Бузыцкого, Е.В. Левнера, Б.Г. Литвака; под ред. А.А. Фридмана. – М.: Изд-во «Мир», 1974. – 514 с.
12. *Карпенко А.П.* Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. – 446 с.