МНОГОУРОВНЕВОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕГИОНАЛЬНЫМИ ПРОЕКТАМИ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО УРОВНЯ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ КОМПЛЕКСА РАБОТ С ДИРЕКТИВНЫМИ СРОКАМИ

Кононов Д.А.,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
dmitrykon52@gmail.com
Фуругян М.Г.
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия
rtsccas@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается многоуровневая система управления региональными проектами, в которой на верхнем уровне (Центр) устанавливаются целевые и директивные показатели выполнения комплекса работ, реализуемых на нижнем уровне управления (производство). Формулируется задача определения параметров производственной системы (производительности исполнительных механизмов, объемы и эффективность использования ресурсов), позволяющих выполнить заданный комплекс работ в заранее установленные сроки. Для решения указанной задачи используется сетевое моделирование и алгоритмы нахождения потоков с заданными свойствами в сетях с выигрышами.

Ключевые слова: региональный проект, многоуровневое управление, комплекс работ, исполнительный механизм, допустимое расписание, распределение ресурсов, потоковая сеть с выигрышами.

Введение

Рассматривается многоуровневая система управления региональными проектами, в которой на верхнем уровне (Центр) устанавливаются целевые и директивные показатели выполнения комплекса работ, реализуемых на нижнем уровне управления (производство). Формулируется задача определения параметров производственной системы (производительности исполнительных механизмов, объемы и эффективность использования ресурсов), позволяющих выполнить заданный комплекс работ в заранее установленные сроки.

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [1–9].

Задачи распределения ресурсов и планирования работ возникают в различных областях деятельности человека. В частности, такие задачи часто надо решать в тех случаях, когда заранее установлены директивные сроки выполнения работ при использовании ограниченных ресурсов. Системы жесткого реального времени характерны тем, что на выполнение заданий отводятся доли секунды. Например, подобная ситуация имеет место при испытаниях и эксплуатации сложных технических объектов (самолеты, ракеты, атомные реакторы), при наблюдении за ситуацией в космосе, при проведении военных действий. Более продолжительные временные интервалы отводятся для обработки информации, связанной с экономикой и экологией.

Во всех указанных выше случаях требуется решение двух основных задач – планирования и синтеза. Задача планирования заключается в построении расписания, согласно которому все задания будут выполнены в отведенных для них временных интервалах. При решении задачи синтеза определяются параметры производственной системы (производительности исполнительных механизмов, объемы и эффективность использования дополнительных ресурсов), при которых работы смогут завершиться не позднее установленных для них директивных сроков.

По вопросам планирования работ и построения расписаний известно немало отечественной и зарубежной литературы. Так, в [10] подробно исследуются задачи, связанные с разработкой алгоритмов построения расписаний для однопроцессорных и многопроцессорных систем. Рассматриваются задачи как с независимыми заданиями, так и с работами, связанными отношениями предшествования. Исследуются вопросы вычислительной сложности задач и построенных алгоритмов. Рассмотрены примеры полиномиально разрешимых и NP-трудных задач. В [11] проводится классификация задач планирования работ и теории расписаний. Решаются некоторые дискретные оптимизационные задачи, задачи составления расписаний с одним и несколькими приборами, задачи на быстродействие для всего комплекса работ и задачи с директивными сроками для каждой отдельной работы. Подробно исследован метод ветвей и границ. Большое внимание уделяется вопросам вычислительной сложности алгоритмов. В отличие от [10, 11], в [12] исследуются задачи планирования работ и построения расписаний в многостадийных системах. Рассмотрены задачи с одинаковыми последовательностями прохождения станков, а также задачи с различными и нефиксированными маршрутами. Предложен теоретико-игровой подход к анализу таких задач.

В [13, 14] исследован метод «ветвей и границ» для решения задач планирования работ и составления расписаний, возникающих в экономике и финансовой сфере. Рассмотрены задачи с нефиксированными параметрами, такими, как длительности выполнения заданий и объемы имеющихся ресурсов. Предполагается, что эти параметры либо могут принимать значения из заданных интервалов, либо являются случайными величинами. Разработан алгоритм, согласно которому множества значений этих параметров разбиваются на многогранники устойчивости, внутри каждого из которых расписание имеет постоянную структуру. В [15, 16] исследован ряд NP-трудных задач составления однопроцессорных и многопроцессорных расписаний. Предложены алгоритмы для критериев минимизации времени выполнения всего комплекса работ, а также минимизации максимального запаздывания. Вводится понятие расстояния между заданиями, на основе которого предложена методика нахождения приближенных решений.

В указанных выше публикациях исследуются задачи распределения нескладируемых ресурсов, т.е. таких ресурсов, которые могут использоваться многократно (исполнительные механизмы, приборы, процессоры, машины, станки и т.д.). В отличие от них, складируемые ресурсы повторно использоваться не могут. Примерами являются финансы, горюче-смазочные материалы, электроэнергия, устройства, предназначенные для выполнения отдельной работы. В [17, 18] рассмотрены задачи распределения складируемых ресурсов при минимизации времени выполнения комплекса работ. Предполагается, что длительности выполнения заданий линейно зависят от объема выделенных им ресурсов. В [17] также рассмотрена задача минимизации потребления ресурсов при заданном директивном сроке выполнения всех работ.

В [19] при составлении оптимального расписания предполагается, что используются ресурсы двух типов – складируемых и нескладируемых. Для решения этой задачи строится потоковая сеть специального вида, в которой определяется поток минимальной стоимости. Задача нахождения производительностей процессоров, при которых существует допустимое расписание в системе с однородным набором ресурсов, исследована в [20] и сведена к системе линейных ограничений.

В настоящей статье рассматривается задача планирования комплекса работ с заданными директивными сроками в производственной системе со смешанным набором ресурсов - складируемых и нескладируемых. Исследуется вопрос о существовании и построении решения (допустимого распределения ресурсов и допустимого расписания). В случае, если решения не существует, решается вопрос о корректировке параметров системы (производительности процессоров, объемы и эффективности ресурсов). Предлагаемая методика основана на использовании потоковых сетей с выигрышами. Решение указанных задач имеет большое значение при проектировании и функционировании сложных технических объектов, в частности, бортовых систем управления.

1. Математическая постановка задачи

Введем следующие обозначения.

$W=\{w_1,w_2,\dots,w_n\}$ – комплекс работ (заданий), которые должны быть выполнены с использованием m исполнительных механизмов (нескладируемые ресурсы) и набора складируемых ресурсов. Каждая работа w_i имеет две характеристики – директивный интервал $[b_i;\ f_i]$ (задание w_i может выполняться только в этом временном интервале) и объем V_i.

$P_1,P_2,\dots,P_m$ – исполнительные механизмы, производительности которых равны $s_1,s_2,\dots,s_m$ соответственно. Каждая работа может выполняться любым исполнительным механизмом. Допускаются прерывания и переключения с одного механизма на другой, которые, по предположению, не требуют временных затрат. Кроме того, допускается параллельное выполнение одной работы несколькими исполнительными механизмами (в частности, всеми механизмами вместе). Не допускается одновременное выполнение нескольких работ одним исполнительным механизмом. Если механизм с производительностью s выполняет некоторое задание в течение интервала времени δ, то объем выполненной им работы составляет $s\delta$.

Помимо исполнительных механизмов для выполнения заданий могут использоваться L типов складируемых ресурсов. Для краткости, в дальнейшем будем называть их, просто, ресурсами. Их объемы составляют $R_1,R_2,\dots,R_L$ соответственно. В отличие от исполнительных механизмов, ресурсы повторно использоваться не могут. Если для выполнения задания w_i выделено r_{li} единиц ресурса l-го типа, то это обеспечивает объем работы, равный $r_{li}z_{li}$, где z_{li} – эффективность использования ресурса l-го типа для задания w_i. В отличие от [19], эффективность зависит как от типа ресурса, так и от задания. Работе w_i должно быть выделено не менее r_{li}^0 и не более r_{li}^1 единиц ресурса l-го типа, $l = \overline{1, L}$. Величина V_i – это суммарный объем работы, обеспечиваемый исполнительными механизмами и ресурсами, необходимый для выполнения задания w_i.

Допустимым распределением ресурсов будем называть распределение r_{li}, которое удовлетворяет ограничениям:

$$r_{li}^0 \le r_{li} \le r_{li}^1, l = \overline{1, L}, i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_{li} \le R_l, l = \overline{1, L}. \tag{2}$$

Расписание для комплекса W показывает для каждой работы $w_i \epsilon W$, в какие временные интервалы какими исполнительными механизмами она выполняется. Допустимым расписанием будем называть такое расписание для W, при котором каждое задание $w_i \epsilon W$ полностью исполняется в своем директивном интервале $[b_i;\ f_i]$. Решением задачи будем называть пару "допустимое распределение ресурсов – допустимое расписание".

Параметрами системы будем называть производительности исполнительных механизмов, а также объемы и эффективность использования ресурсов. Требуется решить следующие задачи.

Задача 1. При фиксированных параметрах системы определить, существует ли решение, и найти его в случае положительного ответа.

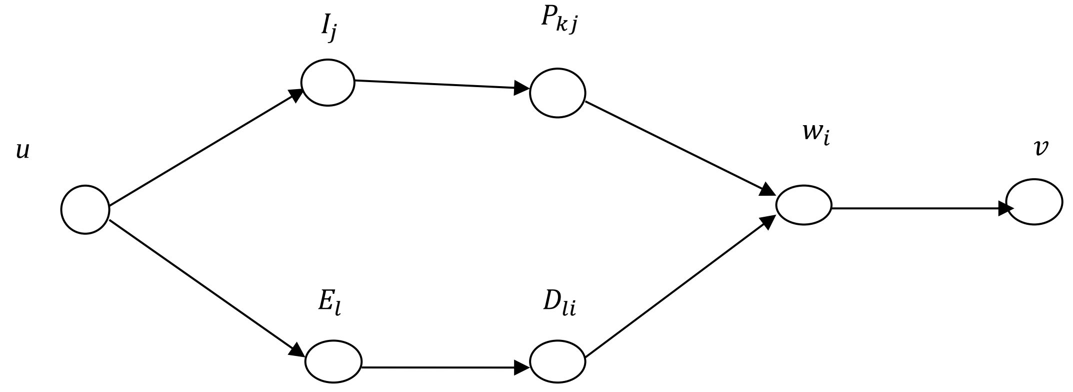
Задача 2. В случае отрицательного ответа в задаче 1 скорректировать параметры системы так, чтобы решение существовало.

Решение сформулированных задач основано на построении потоковой сети и нахождении в ней потоков с определенными свойствами. В отличие от [19], будем использовать сети с выигрышами [21].

2. Решение задачи 1

Для решения сформулированных выше задач будем использовать потоковые сети с выигрышами. В сети с выигрышами в некоторых узлах величина выходящего потока отличается от величины входящего потока [20]. А именно, величина выходящего потока из узла a равна величине входящего потока в узел a, умноженной на постоянное для данного узла число $c(a)$, называемое коэффициентом выигрыша узла a.

Пусть $y_0 < y_1 < \cdots < y_p$ – все различные величины b_i и f_i, $i = \overline{1, n}$. Построим потоковую ориентированную сеть с выигрышами $G = (N, A)$, где $N = \{u, I_j, E_l, D_{li}, P_{kj}, w_i, v\}$, $j = \overline{1, p}$, $l = \overline{1, L}$, $k = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$ – множество узлов, $A = \{(u, I_j), (u, E_l), (E_l, D_{li}), (I_j, P_{kj}), (P_{kj}, w_i), (D_{li}, w_i), (w_i, v)\}$, $j = \overline{1, p}$, $l = \overline{1, L}, k = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}$ – множество ориентированных дуг (см. рис. 1).



$j = \overline{1, p}, l = \overline{1, L},\ k = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}$

Рис. 1. Фрагмент потоковой сети G с выигрышами

Здесь u – источник, v – сток, I_j соответствует интервалу $[y_{j-1};\ y_j]$, E_l – ресурсу l-го типа, D_{li} – ресурсу l-го типа и заданию w_i, P_{kj} – работе исполнительного механизма P_k в интервале I_j, w_i – заданию $w_i \epsilon W$. Дуга (P_{kj}, w_i) вводится в сеть G в том случае, если $I_j \epsilon [b_i;\ f_i]$, т.е. если работа w_i может выполняться в интервале I_j. Сеть G содержит $O(pm + Ln)$ узлов и $O((pm + Ln)n)$ ориентированных дуг.

Узел P_{kj} имеет коэффициент выигрыша, равный s_k. Это означает, что если в узел P_{kj} по дуге (I_j, P_{kj}) входит поток g, то величина суммарного потока, выходящего из узла P_{kj} по дугам (P_{kj}, w_i), равна $s_k g$, т.е.:

$$\sum_{i=1}^{n} g\left(P_{kj}, w_i\right) = s_k g\left(I_j, P_{kj}\right). \quad (3)$$

Коэффициент выигрыша узла D_{li} равен z_{li}. Это означает, что если в узел D_{li} по дуге (E_l, D_{li}) входит поток g, то величина потока, выходящего из узла D_{li} по дуге (D_{li}, w_i), равна $z_{li}g$, т.е.:

$$g(D_{li}, w_i) = z_{li} g(E_l, D_{li}). \quad (4)$$

Коэффициенты выигрыша остальных узлов равны 1, т.е. для них выполняется условие сохранения потока. В узлах P_{kj} и D_{li} это условие переходит в равенства (3), (4) соответственно. Каждая дуга $(x, y)\epsilon A$ сети G имеет два параметра: $L(x, y)$ – нижняя граница потока по дуге (x, y), $U(x, y)$ – верхняя граница потока по дуге (x, y). Значения параметров L и U приведены в табл. 1. В табл. 2 дается физический смысл потока g по дугам сети G.

Таблица 1. Значения параметров дуг сети G

Дуга	***L***	***U***
(u, I_j)	0	$m\delta_j$
(u, E_l)	0	R_l
(E_l, D_{li})	r_{li}^0	r_{li}^1
(I_j, P_{kj})	0	δ_j
(P_{kj}, w_i)	0	$s_k\delta_j$
(D_{li}, w_i)	$z_{li}r_{li}^0$	$z_{li}r_{li}^1$
(w_i, v)	V_i	V_i

Таблица 2. Физическая интерпретация потока g *по дугам сети* G

Поток по дуге	**Физический смысл потока по дуге**
$g(u, I_j)$	Суммарное распределяемое время работы исполнительных механизмов в интервале I_j
$g(u, E_l)$	Суммарное распределяемое количество ресурса l-го типа
$g(E_l, D_{li})$	Объем ресурса l-го типа, выделяемый заданию w_i
$g(I_j, P_{kj})$	Суммарное время работы исполнительного механизма P_k в интервале I_j
$g(P_{kj}, w_i)$	Объем работы исполнительного механизма P_k по выполнению задания w_i в интервале I_j
$g(D_{li}, w_i)$	Объем работы по выполнению задания w_i с помощью ресурса l-го типа
$g(w_i, v)$	Суммарный объем работы по выполнению задания w_i с помощью исполнительных механизмов и ресурсов

Докажем следующее утверждение.

Лемма. Для существования решения в задаче 1 необходимо и достаточно, чтобы в сети G существовал поток.

Доказательство. Необходимость. Покажем, что из существования решения в задаче 1 следует существование потока g в сети G. Пусть решение таково, что работе w_i выделено r_{li} единиц ресурса l-го типа. Определим поток по дуге (E_l, D_{li}) равным этой величине, т.е. $g(E_l, D_{li}) = r_{li}$. Пусть, далее, $g(D_{li}, w_i) = z_{li}r_{li}$,

$$g(u, E_l) = \sum_{i=1}^{n} g(E_l, D_{li}) = \sum_{i=1}^{n} r_{li}$$

Тогда из (1), (2) следует, что $z_{li}r_{li}^0 \leq g(D_{li}, w_i) = g(E_l, D_{li})z_{li} \leq z_{li}r_{li}^1$, $0 \leq g(u, E_l) \leq R_l$.

Пусть, далее, t_{kji} – продолжительность выполнения работы w_i исполнительным механизмом P_k в интервале I_j $(t_{kji} \leq \delta_j)$. Определим $g(P_{kj}, w_i) = s_k t_{kji}$,

$$g(I_j, P_{kj}) = \sum_{i=1}^{n} t_{kji}.$$

Тогда $0 \leq g(P_{kj}, w_i) \leq s_k\delta_j, 0 \leq g(I_j, P_{kj}) \leq \delta_j$. Положим, далее,

$$g\big(u, I_j\big) = \sum_{k=1}^{m} g\big(I_j, P_{kj}\big).$$

Тогда $0 \le g\big(u, I_j\big) \le m\delta_j$. Наконец, определим

$$g(w_i, v) = \sum_{l=1}^{L} g(E_l, w_i) + \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} g\big(P_{kj}, w_i\big),$$

т.е. $g(w_i, v)$– это суммарный объем работы по выполнению задания w_i, предоставляемый исполнительными механизмами и ресурсами. Поскольку работа w_i выполнена полностью, то $g(w_i, v) = V_i$.

Следовательно, не нарушены ограничения на поток по всем дугам сети *G*, заданные в табл. 1. Кроме того, выполнены условия сохранения потока в узлах $I_j, j = \overline{1,p}$, $E_l, l = \overline{1,L}$, и $w_i, i = \overline{1,n}$, а также условия (3), (4) для узлов D_{li}, $l = \overline{1,L}$, $i = \overline{1,n}$ и $P_{kj}, k = \overline{1,m}$, $j= \overline{1,p}$. Следовательно, g является потоком в сети *G*.

Достаточность. Предположим, что в сети *G* существует некоторый поток g. С помощью этого потока и пояснений, содержащихся в табл. 2, можно построить решение задачи 1. Используя дополнительно соотношения (3), (4), сделаем следующие выводы.

1) Структура сети *G* такова, что каждая работа w_i выполняется только в своем директивном интервале$[b_i;\ f_i]$.

2) Суммарное время работы исполнительного механизма P_kв интервале I_j составляет

$$\sum_{i=1}^{n} g\big(P_{kj}, w_i\big)/s_k = g\big(I_j, P_{kj}\big) \le \delta_j.$$

Такое расписание выполнения работ *W* процессорами $P_1, P_2, \ldots, P_m$ может быть реализовано, поскольку по условию задачи допускается параллельное выполнение одного задания произвольным числом исполнительных механизмов.

3) Суммарное время работы всех *m* исполнительных механизмов в интервале I_j составляет

$$\sum_{k=1}^{m} g\big(I_j, P_{kj}\big) = g\big(u, I_j\big) \le m\delta_j,$$

что допустимо.

4) Объем ресурса *l*-го типа, выделяемый работе w_i, составляет $g(E_l, D_{li})$, что удовлетворяет условию задачи, поскольку $r_{li}^0 \le g(E_l, D_{li}) = r_{li} \le r_{li}^1$.

5) Суммарный объем ресурса *l*- го типа, используемый для выполнения работ, составляет

$$\sum_{i=1}^{n} g(E_l, D_{li}) = g(u, E_l) \le R_l,$$

что удовлетворяет условию задачи.

6) Каждая работа выполнена полностью, поскольку $g(w_i, v) = V_i$ при всех $i = \overline{1,n}$.

Таким образом, если в сети *G* существует поток, то в задаче 1 существует решение. Лемма доказана.

Из леммы и проведенных выше рассуждений вытекает следующий алгоритм решения задачи 1.

Ш а г 1. Построить сеть *G*.

Ш а г 2. Найти в сети *G* поток g. (Для этого может быть использован, например, алгоритм дефекта [12]. При этом стоимость единицы потока по каждой дуге полагается равной нулю.) Если поток существует, то перейти на шаг 3. В противном случае – на шаг 4.

Ш а г 3. Работе w_i следует выделить ресурс *l*-го типа в количестве $g(D_{li}, w_i)/z_{li}$, $l = \overline{1,L}$, и выполнять ее исполнительным механизмом P_k в интервале I_j в течение времени $g\big(P_{kj}, w_i\big)/\, s_k$, $k = \overline{1,m}$, $j= \overline{1,p}$, $i = \overline{1,n}$. Завершение алгоритма.

Ш а г 4. Решения не существует.

Оценим вычислительную сложность предложенного алгоритма. Учитывая неравенство $p \le 2n - 1$, получаем, что число узлов и число дуг в сети *G* составляет соответственно $O(mn + Ln)$ и $O(mn^2 + Ln)$. Тогда сложность отдельных этапов алгоритма следующая: шаг 1 – $O(mn^2 + Ln)$, шаг 2 – $O((mn^2 + Ln)^2 \max\limits_{(x,y)\epsilon A} U(x, y))$, шаг 3 – $O(mn + Ln)$. Таким образом, вычислительная сложность алгоритма составляет $O((mn^2 + Ln)^2 \max\limits_{(x,y)\epsilon A} U(x, y))$.

Замечание. Одним из действий алгоритма дефекта [21], применяемого на шаге 2, является поиск увеличивающего пути. Следует учесть, что при прохождении через узел D_{li} по дугам (E_l, D_{li}) и (D_{li}, w_i) поток по дуге (D_{li}, w_i) необходимо умножить на z_{li}. Аналогично, при прохождении через узел P_{kj} по дугам (I_j, P_{kj}) и (P_{kj}, w_i) поток по дуге (P_{kj}, w_i) следует умножить на s_k. При прохождении через узлы D_{li} и P_{kj} по дугам (w_i, D_{li}), (D_{li}, E_l)и (w_i, P_{kj}), (P_{kj}, I_j) соответственно (т.е. в случае, когда эти дуги используются как обратные) потоки по дугам (D_{li}, E_l) и (P_{kj}, I_j) следует разделить соответственно на z_{li} и s_k.

3. Решение задачи 2

3.1. Построение области допустимых производительностей исполнительных механизмов при условии отсутствия ресурсов

Рассмотрим случай, когда система состоит только из исполнительных механизмов, а ресурсы отсутствуют. Без ограничения общности можно считать, что искомые производительности исполнительных механизмов удовлетворяют неравенствам:

$$s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_m. \tag{5}$$

Пусть $S_k = s_1 + s_2 + \cdots + s_k$, $k = \overline{1, m}$.

Будем говорить, что работа w_i доступна в интервале I_j, если $I_j \subseteq [b_i;\ f_i]$, т.е. работа w_i может выполняться в интервале I_j. Без ограничения общности можно считать, что в каждом интервале I_j $1 \leq j \leq p$, доступна хотя бы одна работа $w_i \epsilon W$, поскольку интервалы I_j, которые не удовлетворяют этому условию, можно исключить из дальнейшего рассмотрения, а оставшиеся интервалы перенумеровать.

Как следует из [22], допустимое расписание в поставленной задаче существует тогда и только тогда, когда для любого подмножества $\widetilde{N} \subseteq N$ выполнено неравенство

$$\sum_{i \epsilon \widetilde{N}} V_i \leq \sum_{j=1}^{p} \delta_j S_{k(j,\widetilde{N})}\,, \tag{6}$$

где $k(j,\widetilde{N}) = \min(m,m')$, m' – число работ $\widetilde{N} \subseteq N$, доступных в интервале I_j. Таким образом, для нахождения производительностей исполнительных механизмов, при которых существует решение в задаче 1 при отсутствии ресурсов, следует решить систему линейных неравенств (5), (6).

3.2. Построение области допустимых параметров системы при наличии ресурсов

Используя поток g в сети G, опишем задачу 1 в виде следующей системы линейных ограничений, в которой требуется найти значения переменных $g(u, I_j)$, $g(u, E_l)$, $g(E_l, D_{li})$, $g(I_j, P_{kj})$, (P_{kj}, w_i), (D_{li}, w_i), (w_i, v), $j = \overline{1, p}$, $l = \overline{1, L}$, $k = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$.

$$g(u, I_j) = \sum_{k=1}^{m} g(I_j, P_{kj})\,, j = \overline{1, p}, \tag{7}$$

$$g(u, E_l) = \sum_{i=1}^{n} g(E_l, D_{li}), l = \overline{1, L}, \tag{8}$$

$$z_{li} g(E_l, D_{li}) = g(D_{li}, w_i), l = \overline{1, L}, i = \overline{1, n}, \tag{9}$$

$$s_k g(I_j, P_{kj}) = \sum_{i=1}^{n} g\left(P_{kj}, w_i\right), j = \overline{1, p}, k = \overline{1, m}, \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} g(P_{kj}, w_i) + \sum_{l=1}^{L} g(E_l, w_i) = g(w_i, v), i = \overline{1, n}, \tag{11}$$

$$0 \leq g(u, I_j) \leq m\delta_j, j = \overline{1, p}, \tag{12}$$

$$0 \leq g(u, E_l) \leq R_l, l = \overline{1, L}, \tag{13}$$

$$0 \leq g(I_j, P_{kj}) \leq \delta_j, j = \overline{1, p}, k = \overline{1, m}, \tag{14}$$

$$0 \leq g(P_{kj}, w_i) \leq s_k \delta_j, j = \overline{1, p}, k = \overline{1, m}, \tag{15}$$

$$r_{li}^0 \leq g(E_l, D_{li}) \leq r_{li}^1, i = \overline{1, n}, l = \overline{1, L}, \tag{16}$$

$$z_{li} r_{li}^0 \leq g(D_{li}, w_i) \leq z_{li} r_{li}^1, i = \overline{1, n}, l = \overline{1, L}, \tag{17}$$

$$g(w_i, v) = V_i, i = \overline{1,n}. \quad (18)$$

Равенства (7), (8), (11) описывают условие сохранение потока в узлах I_j, E_l и w_i соответственно, а равенства (9), (10) – изменение потока в узлах D_{li} и P_{kj} соответственно. Неравенства (12) – (17) и равенство (18) соответствуют ограничениям, указанным в табл. 1. Данная система содержит $O(pmn + Ln)$переменных и $O(pm + Ln)$линейных ограничений.

Перейдем к решению задачи 2. Предположим, что при исходных данных решения в задаче 1 не существует. Определим, каким образом следует изменить параметры системы, чтобы решение существовало. Сначала исследуем, как надо увеличить производительности исполнительных механизмов, чтобы решение в задаче 1 существовало. При этом будем минимизировать максимальное приращение производительностей. Пусть производительность исполнительного механизма P_k увеличена на s_k^0. Найдем такие величины s_k^0, при которых

$$\max_{k=\overline{1,m}} s_k^0$$

принимает минимальное значение. Это означает, что производительности всех исполнительных механизмов следует увеличить на одну и ту же величину. Иными словами, надо минимизировать величину s^0 при условии, что с производительностями исполнительных механизмов $s_k + s^0, k = \overline{1,m}$, решение в задаче 1 будет существовать. Таким образом, получаем следующую задачу линейного программирования:

найти min s^0

при условиях (7) – (9), (11) – (14), (16) – (18) и ограничениях

$$(s_k + s^0)g(I_j, P_{kj}) = \sum_{i=1}^{n} g(P_{kj}, w_i), j = \overline{1,p}, k = \overline{1,m},$$

$$0 \le g(P_{kj}, w_i) \le (s_k + s^0)\delta_j, j = \overline{1,p}, k = \overline{1,m}.$$

Аналогично, для определения минимального увеличения объема R^0 ресурсов каждого типа получаем задачу линейного программирования:

найти min R^0 при условиях (7) – (12), (14) – (18) и ограничениях

$$0 \le g(u, E_l) \le R_l + R^0, l = \overline{1,L}.$$

Для определения минимального увеличения эффективности z^0 ресурсов каждого типа получаем задачу линейного программирования:

найти min z^0

при условиях (7), (8), (11) – (16), (18) и ограничениях

$$0 \le g(u, E_l) \le R_l + R^0, l = \overline{1,L}.$$

$$(z_{li} + z^0)g(E_l, D_{li}) = g(D_{li}, w_i), i = \overline{1,n}, l = \overline{1,L},$$

$$(z_{li} + z^0)r_{li}^0 \le g(D_{li}, w_i) \le (z_{li} + z^0)r_{li}^1, i = \overline{1,n}, l = \overline{1,L}.$$

4. Заключение

Исследована задача распределения ресурсов и построения допустимого расписания для комплекса работ в производственной системе. Разработан алгоритм нахождения параметров системы (производительности исполнительных механизмов, объемы и эффективность использования ресурсов), при которых решение в поставленной задаче существует. Для решения указанных задач используется сетевое моделирование и алгоритмы нахождения потоков с заданными свойствами в сетях с выигрышами.

Литература

1. *Кононов Д.А., Фуругян М.Г.* Распределение неоднородного комплекса ресурсов при региональном управлении // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2021): Труды тринадцатой междунар. конф. – М.: ИПУ РАН, 2020. – С. 1298–1305.
2. *Кононов Д.А., Фуругян М.Г.* Оптимизация использования неоднородного комплекса ресурсов при региональном планировании // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2021): Труды четырнадцатой междунар. конф. – М.: ИПУ РАН, 2021. – С. 1231–1237.

3. *Фуругян М.Г.* Планирование вычислений в многопроцессорных системах с несколькими типами дополнительных ресурсов и произвольными процессорами // Вестник МГУ. Сер. 15. 1917. № 3. – С. 38–45.
4. *Kononov D., Furugyan M.* Control of a Complex of Works in Multiprocessor Real-time ACS // Proceedings of the 1st International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA2019, Lipetsk). – Lipetsk: IEEE, 2019. https://ieeexplore.ieee.org/document/8947570 (дата обращения 27.04.2023).
5. *Kononov D., Furugyan M.* Distribution of Non-Uniform Complex of Resources in Production Systems // IFAC-PapersOnLine. – Nantes, France: Elsevier, 2022. – Volume 55, Issue 10. – P. 2138–2143.
6. *Kononov D., Furugyan M.* Effective Management of Regional Projects Resources // Proceedings of the 12th International Conference "Management of Large-Scale System Development" (MLSD). – M.: IEEE, 2019. – P. 1–5. https://ieeexplore.ieee.org/document/8910972 (дата обращения 20.04.2023).
7. *Kononov D., Furugyan M.* Ensuring the Security of the Operation of Complex Systems: New Models and Algorithms // IFAC-PapersOnLine. – Moscow: Elsevier Ltd., 2021. – Vol. 54, Iss. 13. – P. 123–128.
8. *Kononov D., Furugyan M.* Optimization of Work Planning in the Production of Innovations // Proceedings of the 4th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). – Lipetsk: IEEE, 2022. – P. 592–596.
9. *Kononov D., Furugyan M.* Planning a Complex of Works with Heterogeneous Resources under Uncertainty // Proceedings of the 15th International Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD). – Moscow: IEEE, 2022. – P. 1–5. https://ieeexplore.ieee.org/document/9934381 (дата обращения 19.04.2023).
10. *Танаев В.С., Гордон В.С., Шафранский Я.М.* Теория расписаний. Одностадийные системы. – М.: Наука, 1984. – 383 с.
11. *Brucker P.* Scheduling Algorithms. – Heidelberg: Springer, 2007. – 371 p.
12. *Танаев В.С., Сотсков Ю.Н., Струсевич В.А.* Теория расписаний. Многостадийные системы. – М.: Наука, 1989. – 327 с.
13. *Мищенко А.В., Кошелев П.С.* Оптимизация управления работами логистического проекта в условиях неопределенности // Известия РАН. Теория и системы управления. 2021. № 4. – С.123–134.
14. *Горский М.А., Мищенко А.В., Нестерович Л.Г., Халиков М.А.* Некоторые модификации целочисленных оптимизационных задач с учетом неопределенности и риска // Известия РАН. Теория и системы управления. 2022. № 5. – С.106–117.
15. *Лазарев А.А.* Теория расписаний. Оценка абсолютной погрешности и схема приближенного решения задач теории расписаний. – М.: МФТИ, 2008. – 222 с.
16. *Лазарев А.А.* Теория расписаний. Методы и алгоритмы. – М.: ИПУ РАН, 2019. – 407 с.
17. *Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей. – М.: Мир, 1984. – 496 с.
18. *Давыдов Э.Г.* Исследование операций. – М.: Высшая школа, 1990. – 384 с.
19. *Кононов Д.А., Фуругян М.Г.* Оптимизация использования неоднородного комплекса ресурсов при региональном планировании // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD’2021): Труды четырнадцатой междунар. конф. – М.: ИПУ РАН, 2021. – С. 1231–1237.
20. *Фуругян М.Г.* Синтез многопроцессорной системы при построении расписаний с прерываниями и директивными интервалами // Известия РАН. Теория и системы управления. 2019. N 2. – С. 41–46.
21. *Майника Э.* Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. – М.: Мир, 1981. – 324 с.
22. *Martel C.* Preemptive Scheduling with Release Times, Deadlines, and Due Times // J. ACM. – 1982. – V. 29. № 3. – P. 812–829.