# МЕТОД ЭКСПРЕСС-ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ ТУМАННОГО ВЫЧИСЛИТЕЛЯ ТОПОЛОГИИ «ЗВЕЗДА» НА ЕГО ИНТЕГРАЛЬНЫЙ РИСК

**Широкий А.А.**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия*

shiroky@ipu.ru

*Аннотация. В работе обсуждаются количественные оценки зависимости величины интегрального риска сложной системы от расположения элементов в ее внутренней структуре на примере туманного вычислителя. Полученный результат применен для построения алгоритма экспресс-оценки риска туманного вычислителя со звездообразной топологией.*

*Ключевые слова: управление рисками, оценка рисков, туманные вычисления.*

## Введение

Большинство компьютерных сетей имеют фиксированную внутреннюю структуру (или, по-другому, топологию), обусловленную их целевой функциональностью. И хотя структура сети, за исключением отдельных вырожденных случаев, оказывает влияние на ее интегральный риск, изменение топологии в качестве меры снижения последнего обычно не рассматривается по причине возможного нарушения функциональности. Кроме того, такие изменения часто связаны со значительными затратами ресурсов, в связи с чем другие меры снижения риска на практике оказываются более эффективными.

В то же время существуют классы компьютерных сетей, в дизайн которых заложено регулярное изменение топологии. К таковым можно отнести, например, беспроводные mesh-сети [1], а также туманные вычислители [2, 3]. Алгоритм построения минимизирующий риск топологии компьютерной сети был описан ранее в работе [4]. В настоящей работе рассматривается вопрос влияния внутренней структуры туманного вычислителя на изменение оценки величины его интегрального риска.

Напомним вкратце, как устроена архитектура классической IoT-системы [5]. Она включает в себя минимум два слоя — сенсорный и облачный. На первом слое расположены сами датчики и «раковины» (sinks), осуществляющие сбор и минимальную предобработку данных с датчиков по одному или нескольким протоколам беспроводной связи. На втором слое размещаются облачное хранилище с вычислительными ресурсами. Связь между слоями обычно осуществляется по каналам фиксированной связи.

Среди типичных недостатков такой архитектуры выделяют резкий рост задержек передачи данных в случае, если сеть становится очень разветвленной. В частности, для систем «умного города» такая архитектура уже не подходит [6]. Для преодоления этого недостатка было предложено добавить между сенсорным и облачным слоем третий — «туманный». Идея состоит в том, чтобы перенести вычислительные ресурсы ближе к сенсорному слою и по возможности большую часть управляющих воздействий формировать в туманном слое, не задействуя облако.

Особенностью туманного вычислителя является то, что его топология может динамически перестраиваться, адаптируясь к изменениям в сенсорной сети. При этом возникает вопрос, влияет ли такое перестроение на интегральный риск системы в целом и если да, то в какой мере? В данной работе предлагается алгоритм экспресс-оценки риска облачного вычислителя в довольно часто встречающемся частном случае, когда он имеет звездообразную топологию.

## 1. Обозначения и определения

Предположим, что туманный вычислитель включает в себя $n$ узлов $s_1, \ldots, s_n \in S, n \in \mathbb{N}$. Будем считать, что каждому узлу соответствуют два числа:

$p_i^0 \in (0, 1]$ — удельная вероятность успешной атаки $i$-го узла;

$u_i > 0, u \in \mathbb{R}^+$ — ущерб, который будет нанесен, если $i$-й узел будет успешно атакован.

**Определение 1.** Удельный риск $i$-го узла определяется следующей величиной:

$$\rho_{s_i}^0 = u_i p_i^0. \tag{1}$$

Зададим топологию туманного вычислителя $W = \langle G(V, E), T \rangle, T \subseteq V$, где $G(V, E)$ — граф со множеством вершин $V$ и множеством ребер $E$, а $T \subseteq V$ — подмножество вершин, имеющих прямое соединение с облачным слоем, которое мы будем называть периметром. В рассматриваемом частном случае будем считать, что $T = \{v_0\}$.

**Определение 2.** Топологией «звезда с $m$ лучами» будем называть такую структуру $W = \langle G(V,E),T\rangle$, что

$$\begin{aligned} &V = \{v_0 \cup \bigcup_{b=1}^{m} \bigcup_{l=1}^{l_b}\{v_{bl}\}\},\\ &E = \{\bigcup_{b=1}^{m}\{(v_0, v_{b1}) \cup \bigcup_{l=2}^{l_b}(v_{b(l-1)}, v_{bl})\}\},\\ &T = \{v_0\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $l_b \in \mathbb{N}$ — число вершин в $b$-м луче, представляющем собой простую цепь с началом в вершине $v_{b1}$. Для всех таких вершин периметр $v_0$ является смежной вершиной. В общем случае $l_b$ не ограничены.

**Определение 3.** Если для топологии $W = \langle G(V,E),T\rangle$ существует взаимно-однозначное отображение $M: V \to S$, то будем называть его отображением топологии $W_m$ на множество узлов $S$.

**Определение 4.** Взаимно-однозначное отображение $M^{-1}: S \to V$, обратное ранее определенному отображению $M: V \to S$, будем называть размещением узлов $S$ в топологии $W_m$.

В настоящей работе мы рассматриваем случай, когда нам неизвестны точные значения ущерба при успешной атаке того или иного узла, поэтому далее будем считать, что $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = u$.

**Определение 5.** Локальным риском узла туманного вычислителя, отображенного в вершину $v_{bl}$ топологии $W_m$, будем называть величину

$$\rho_{M(v_{bl})} = u_{M(v_{bl})} \prod_{v \in \langle v_0, v_{bl}\rangle} p_{M(v)}, \tag{3}$$

где $\langle v_0, v_{bl}\rangle$ — простой путь, соединяющий вершину-периметр $v_0$ с вершиной $v_{bl}$. Локальный риск узла, отображенного в вершину $v_0$, равен его удельному локальному риску. Отметим, что в рассматриваемом случае простой путь существует и является единственным.

**Определение 6.** Интегральным риском туманного вычислителя со множеством узлов $S$ и топологией $W_m$, расположение которых определено взаимно-однозначным отображением $M^{-1} : S \to W_m$, будем называть величину

$$\rho(S, W_m, M^{-1}) = \rho_{M(v_0)} + \sum_{b=1}^{m} \sum_{l=1}^{l_b} \rho_{M(v_{bl})}. \tag{4}$$

Для оценки влияния топологии туманного вычислителя на его интегральный риск сформулируем следующую постановку задачи. Пусть защищаемый вычислитель включает в себя множество узлов $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}, n \in \mathbb{N}$ с соответствующими им вероятностями успешной атаки $P = \{p_{s_1}, p_{s_2}, \ldots, p_{s_n}\}$ и ущербами $U = \{u_{s_1}, u_{s_2}, \ldots, u_{s_n}\}$. Предположим, что задана топология типа «звезда с $m$ лучами» $W_m = \langle G(V,E),T\rangle$, причем $\sum_{b=1}^{m} l_b = n - 1$. Тогда задача построения минимизирующей риск топологии туманного вычислителя заключается в поиске такого размещения узлов $S$ в топологии $W_m$, что

$$\rho(S, W_m, M^{-1}) \to \min. \tag{5}$$

Для частного случая $m = 1$ решение в общем виде приведено в работе [7]. Для $m = 2$ в §2 будет приведена верхняя оценка максимальной погрешности решения задачи (5). В §3 предложен метод быстрой оценки интегрального риска туманного вычислителя со звездообразной топологией.

## 2. Оценка отклонения интегрального риска от минимума при различных перестановках элементов туманного вычислителя внутри фиксированной топологии

Вначале введем еще два дополнительных определения.

**Определение 7.** Предельным допустимым удельным локальным риском узла туманного вычислителя с топологией $W_m = \langle G(V,E),T\rangle$ будем считать величину

$$\rho^0_{max} = up_{max} = \frac{u}{1+\sqrt{m}}. \tag{6}$$

Содержательная интерпретация величины (6) подробно обсуждается в [8].

**Определение 8.** Остаточным удельным риском туманного вычислителя, включающего в себя $n \in \mathbb{N}$ узлов $s_1, \ldots, s_n \in S$, будем называть величину

$$\rho^0_{min} = up_{min} : p^0_{s_i} \geq p_{min}\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{7}$$

Рассмотрим, как ведет себя интегральный риск туманного вычислителя при постепенном усложнении топологии последнего. В простейшем случае, когда вычислитель состоит из единственного узла $s_1$, его размещение в топологии $W_1 = \langle G(V = \{v_0\}, E = \emptyset), T = \{v_0\} \rangle$ единственно и интегральный риск с учетом введенного определением 7 ограничения удельного локального риска не превысит величины $\frac{u}{2}$.

Если же вычислитель состоит из $n$ узлов и имеет звездообразную топологию с $m = n - 1$ лучами единичной длины (то есть, включающими в себя по одному ребру), то вклад в величину интегрального риска узла, размещенного в вершине $v_0$, не превышает $\rho^0_{max} = \frac{u}{1+\sqrt{n-1}}$, а вклад узлов, размещенных в вершины $v_{b1}, b = \overline{1, n-1}$, составит не более чем $\frac{(n-1)}{u}(\rho^0_{max})^2 = \frac{u(n-1)}{(1+\sqrt{n-1})^2}$. Отметим, что первое выражение при $n \to \infty$ стремится к нулю, а второе — к $u$. Далее для удобства будем говорить, что луч имеет длину $k$, если путь от вершины-периметра до его висячей вершины включает в себя $k$ ребер.

Теперь предположим, что топология вычислителя имеет $m = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ лучей примерно одинаковой длины. Запись $\lfloor n \rfloor$ здесь и далее означает выделение целой части числа $n$. В случае четных $n$ один из лучей будет иметь длину 1, а остальные — 2. Для нечетных $n$ все лучи будут иметь длину 2. Верхняя оценка вклада в интегральный риска узлов, размещенных в вершинах $v_{b2}, b = \overline{1, m}$, равна $\frac{m}{u^2}(\rho^0_{max})^3 = \frac{um}{(1+\sqrt{m})^3}$. Эта величина при $n, m \to \infty$ тоже стремится к нулю.

Таким образом, чем больше лучей содержит топология туманного вычислителя, тем меньшее влияние на его интегральный риск оказывают узлы, размещенные в вершины $v_{bl}$ с $l \geq 2$. Во-вторых, при $m \geq 3$ прирост риска на множестве вершин $\{v_{bl}\}_{b=1}^{m}, l \geq 3$ является незначительным (подробнее см. [8]). Поскольку для вершин $v_0$ и $\{v_{b1}\}_{b=1}^{m}$ оптимальное размещение узлов туманного вычислителя определяется однозначно на основе критерия упорядоченности элементов, доказанного в [7], то с точки зрения практики интерес представляет решение задачи оптимального размещения узлов в тех вершинах топологии, которые от периметра отделяет два ребра, то есть $\{v_{b2}\}_{b=1}^{m}$.

Заметим, что величина $\frac{um}{(1+\sqrt{m})^n}$ для фиксированных значений $n \geq 4$ (то есть, соответствующих подмножествам вершин $\{v_{b3}\}_{b=1}^{m}, \{v_{b4}\}_{b=1}^{m}$ и так далее) монотонно убывает с ростом $m$. В то же время первая производная выражения $\frac{um}{(1+\sqrt{m})^3}$ имеет корень $m = 4$, поэтому верхняя оценка прироста риска достигает максимума в случае, если звездообразная топология имеет 4 луча. Следовательно, в случае невозможности точного решения задачи (5), можно рассматривать различные приближенные решения, причем верхние оценки отклонения таких решений от оптимального будут получаться именно при $m = 4$.

Для получения таких оценок проведем численный эксперимент, состоящий в следующем. Будем последовательно генерировать топологии с числом лучей $m = 4$, каждый из которых имеет длину от трех до некоторого наперед заданного $l_b$. Зададим следующие ограничения:

$$\begin{cases} u = 1; \\ p^0_{M(v_0)} \leq p^0_{M(v_{bl})} \ \forall b \in \{1, \dots, 4\}, l < l_b; \\ p^0_{M(v_0)} > 0; \\ p^0_{M(v_{bl})} > 0 \ \forall b \in \{1, \dots, 4\}, l \leq l_b; \\ p^0_{M(v_0)} \leq \frac{1}{1+\sqrt{m}} = \frac{1}{3}; \\ p^0_{M(v_{bl})} \leq \frac{1}{3} \ \forall b \in \{1, \dots, 4\}, l < l_b; \\ p^0_{M\left(v_{bl_b}\right)} \leq \sum_{l=l_b}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{l+1}. \end{cases} \tag{8}$$

Будем генерировать выражения интегрального риска для всех размещений, получаемых путем перестановок узлов, отображенных в подмножества $\{v_{b1}\}_{b=1}^{4}$, затем (отдельно) $\{v_{b2}\}_{b=1}^{4}$, и так далее. Затем рассмотрим все возможные модули разности этих выражений и для каждой из них проведем поиск глобального максимума. Разделив получившееся значение на минимум интегрального риска из этих двух вычитаемых друг из друга выражений, мы получим относительную разность между ними. Максимум относительных разностей даст нам численную оценку погрешности решения задачи оптимального размещения узлов туманного вычислителя в заданной звездообразной топологии. Результаты эксперимента приведены в таблице 1.

*Таблица 1. Численные оценки относительной погрешности решения задачи оптимального размещения элементов в подмножествах вершин топологии туманного вычислителя, округление до четвертого знака с избытком*

| **Подмножество вершин** | **Оценка величины относительной погрешности** |
|---|---|
| $\{v_{b1}\}_{b=1}^4$ | 0,2 |
| $\{v_{b2}\}_{b=1}^4$ | 0,0607 |
| $\{v_{b3}\}_{b=1}^4$ | 0,0107 |
| $\{v_{b4}\}_{b=1}^4$ | 0,0024 |
| $\{v_{b5}\}_{b=1}^4$ | 0,0006 |
| $\{v_{b6}\}_{b=1}^4$ | 0,0002 |

Таким образом, прирост относительной погрешности решения задачи (5) на множестве вершин, находящихся на расстоянии двух ребер от периметра, не превышает 6,07%. Иными словами, не существует размещения, позволяющего отклониться от минимального значения интегрального риска более, чем на указанную величину.

## 3. Метод экспресс-оценки рисков туманного вычислителя с топологией «звезда»

Рассмотрим туманный вычислитель, включающий в себя множество узлов $S$ и имеющий топологию $W_m$. Предположим, что нам неизвестны ни удельные вероятности успешной атаки каждого из узлов, ни значения ущерба, наносимого злоумышленником в случае успешной атаки какого-либо из узлов вычислителя. В то же время, будем считать, что нам известны величины $p_{min}$ и $p_{max}$, $0 < p_{min} < \frac{u}{1+\sqrt{m}}$, $0 < p_{max} \le \frac{u}{1+\sqrt{m}}$, причем:

$$p_{min} \le p_i^0 \le p_{max} \ \forall i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Тогда при $m = 1$ оценка интегрального риска $\rho_1$ для данного туманного вычислителя будет иметь следующий вид:

$$\rho_1^- = u \sum_{l=1}^{n} (p_{min})^l \le \rho_1 \le u \sum_{l=1}^{n} (p_{max})^l = \rho_1^+, \tag{10}$$

где $u$ — некоторая оценка «среднего» ущерба. Заметим, что эти суммы будут конечны даже для сети со счетным множеством узлов при условии, что $p_{max} \le \frac{1}{1+\sqrt{m}} \le \frac{1}{2}$.

Предположим теперь, что топология рассматриваемого туманного вычислителя имеет два луча с примерно одинаковыми длинами $l_1$ и $l_2$, то есть $n - 1 \le l_1 + l_2 \le n$. Тогда величину интегрального риска $\rho_2$ такой сети можно оценить снизу и сверху через $p_{min}$ и $p_{max}$ соответственно. Запишем вначале выражение для нижней оценки:

$$\begin{aligned} \rho_2^- &= u\left(p_{min} + 2p_{min} \cdot \sum_{l=1}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor} (p_{min})^l + p_{min}\left(n - 1 - 2\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\right)(p_{min})^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\right) = \\ &= u\left(p_{min} + 2\sum_{l=2}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor} (p_{min})^l + \left(n - 1 - 2\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\right)(p_{min})^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Величина $n - 1 - 2\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$ будет равна нулю для нечетных $n$ и 1 — для четных. При этом в первом случае мы получим два луча одинаковой длины, а во втором их длины будут отличаться на единицу. Запись выражения для верхней оценки будет такой же с точностью до замены $p_{min}$ на $p_{max}$.

Теперь запишем выражение для нижней оценки интегрального риска сети с топологией, включающей в себя произвольное конечное число лучей $m$:

$$\rho_m^- = u\left(p_{min} + m \sum_{l=2}^{\left\lfloor\frac{n-1}{m}\right\rfloor+1} (p_{min})^l + \left(n - 1 - m\left\lfloor\frac{n-1}{m}\right\rfloor\right)(p_{min})^{\left\lfloor\frac{n-1}{m}\right\rfloor+2}\right). \tag{12}$$

Выясним, насколько изменится оценка (12) при увеличении числа лучей до $(m + 1)$. Для этого запишем выражение для нижней оценки интегрального риска при новой топологии туманного вычислителя:

$$\rho_{m+1}^{-}=u\left(p_{min}+(m+1)\sum_{l=2}^{\left\lfloor\frac{n-1}{m+1}\right\rfloor+1}(p_{min})^{l}+\left(n-1-(m+1)\left\lfloor\frac{n-1}{m+1}\right\rfloor\right)(p_{min})^{\left\lfloor\frac{n-1}{m+1}\right\rfloor+2}\right)=$$
$$=u\left(p_{min}+m\sum_{l=2}^{\left\lfloor\frac{n-1}{m+1}\right\rfloor+1}(p_{min})^{l}+\sum_{l=2}^{\left\lfloor\frac{n-1}{m+1}\right\rfloor+1}(p_{min})^{l}+\left(n-1-(m+1)\left\lfloor\frac{n-1}{m+1}\right\rfloor\right)(p_{min})^{\left\lfloor\frac{n-1}{m+1}\right\rfloor+2}\right). \quad (13)$$

Оценка величины $|\rho_{m+1}^{-}-\rho_{m}^{-}|$ подробно обсуждается в [8]. Здесь лишь отметим, что верхние и нижние оценки интегрального риска туманного вычислителя монотонно возрастают с ростом числа лучей в его топологии. Заметив, что

$$\forall z=const, l>1\ (p_{min})^{l}-(p_{min})^{l+z}\leq(p_{max})^{l}-(p_{max})^{l+z}, \quad (14)$$

получаем, что величина $\rho_{m}^{+}-\rho_{m}^{-}$ при $p_{min}<p_{max}$ также монотонно возрастает с ростом $m$. При $p_{min}=p_{max}$ достигается равенство верхней и нижней оценок.

Таким образом, чем больше лучей включает в себя топология туманного вычислителя, тем сложнее построить оценку его интегрального риска. Это хорошо согласуется с полученными в работе [8] приближенными решениями задачи оптимального размещения элементов сложной системы в заданной структуре. Дальнейшее развитие результатов видится в их обобщении на случай топологий древовидной, а затем и иерархической структур, в том числе имеющих периметр, состоящий более чем из одной вершины.

## 4. Заключение

Данная работа является частью более крупного исследования, посвященного изучению влияния структуры сложной системы на ее интегральный риск. Представленный алгоритм быстрой оценки интегрального риска туманного вычислителя с довольно часто встречающейся на практике звездообразной топологией может быть также использован для решения задач управления рисками в других компьютерных сетях гибкой топологии, или же при проектировании топологии новой сети.

В сочетании решениями задачи рационального размещения элементов сложной системы в звездообразной структуре, полученный результат формирует задел для изучения влияния внутренней структуры на риски компьютерных сетей более сложных топологий.

## Литература


1. *Hiertz G.R, Denteneer D., Max S., Taori R., Cardona J., Berlemann L., Walke B.* IEEE 802.11s: the WLAN mesh standard // IEEE Wirel Commun. – 2010. – Vol. 17, N 1. – P. 104–111.
2. *Desikan K.S., Kotagi V.J., Murthy C.S.R.* Topology control in fog computing enabled IoT networks for smart cities // Comput. Netw. – 2020. – Vol. 176. – e107270.
3. Hajam S.S., Sofi S.A. IoT-Fog architectures in smart city applications: A survey // China Commun. – 2021. – Vol. 18, N. 11. – P. 117–140.
4. *Shiroky A.A.* Risk Management in the Design of Computer Network Topology // Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications. DCCN 2023. Lecture Notes in Computer Science. – Cham, Switzerland: Springer, 2024. – Vol. 14123. – P. 375–385.
5. *Sobin C.C.* A survey on architecture, protocols and challenges in IoT // Wirel. Pers. Commun. – 2020. – Vol. 112, N. 3. – P. 1383–1429.
6. *Kaur J., Agrawal A., Khan R.A.* Security Issues in Fog Environment: A Systematic Literature Review // Int J Wireless Inf Networks. – 2020. – Vol. 27. – P. 467–483.
7. *Shiroky A.A., Kalashnikov A.O.* Mathematical Problems of Managing the Risks of Complex Systems under Targeted Attacks with Known Structures // Mathematics. – 2021. – Vol. 9, N 19. – e2468.
8. *Shiroky A.A., Kalashnikov A.O.* Influence of the Internal Structure on the Integral Risk of a Complex System on the Example of the Risk Minimization Problem in a “Star” Type Structure // Mathematics. – 2023. – Vol. 11, N 4. – e998.