РАВНОВЕСИЕ В МОДЕЛЯХ РЫНКА, ОПИСЫВАЕМЫХ СИСТЕМАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[1]

Никаноров С.О., Павлова Н.Г.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

nikanorovso@yandex.ru, natasharussia@mail.ru

Аннотация. Исследована динамическая непрерывная модель двухсекторного рынка. Отображения спроса и предложения в данной модели представлены в виде линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрен частный случай математической модели. Получен критерий существования положения равновесия в модели.

Ключевые слова: рыночное равновесие, накрывающие отображения, спрос, предложение.

Введение

Рыночные модели отражают взаимодействие между потребителями и производителями. Производители стремятся получить наибольшую прибыль за счет реализации произведенных товаров. Общий объем реализованной продукции определяется с помощью отображения предложения. Потребители, в свою очередь, стремятся приобрести интересующие их товары. Объем товаров, приобретаемых потребителем, определяется с помощью отображения спроса.

Профицит возникает, когда предложение товара или услуги превышает спрос на них. Это явление имеет значительные последствия для рынка и экономики в целом. Профицит приводит к накоплению излишков продукции. Когда предложение превышает спрос, производители и продавцы сталкиваются с проблемой хранения и продажи избыточных запасов. Это может привести к увеличению затрат на хранение и снижению ликвидности. Избыток может привести к снижению цен на товары. Чтобы избавиться от излишков, производители вынуждены снижать цены, что может негативно сказаться на их прибыли и рентабельности. Также излишек может привести к снижению конкурентоспособности на рынке. Если производители не смогут эффективно управлять своими запасами и снижать цены, они могут потерять свое конкурентное преимущество по сравнению с другими участниками рынка. Таким образом, профицит имеет в основном негативные последствия для рынка.

Дефицит возникает, когда спрос на продукт или услугу превышает предложение. Это явление также имеет значительные последствия для рынка и экономики в целом. Во-первых, дефицит приводит к росту цен на сырьевые товары. Когда спрос превышает предложение, покупатели готовы платить больше за необходимые товары, что делает товары менее доступными для потребителей и может привести к инфляции. Во-вторых, дефицит может вызвать усиление конкуренции на рынке. Покупатели, стремящиеся приобрести дефицитный товар, могут конкурировать друг с другом, что увеличивает спрос и может привести к спекуляциям. Таким образом, дефицит также негативно влияет на экономику.

Ситуация, при которой величины спроса и предложения равны, называется положением общего равновесия. С начала XIX века изучается классическая политическая экономия, основоположником которой считается Адам Смит [1]. Идеи А. Смита были углублены и дополнены целой группой его последователей, среди которых: Т. Р. Мальтус [2], Д. Рикардо [3], Дж. Б. Сэй [4], Н. У., Т.Ф. Бастиа [5]. Мари Эспри Леон Вальрас – французский экономист, в конце XIX века первым построил модель общего равновесия. Отличительной особенностью этой модели является то, что она рассматривается автономно, т.е. без влияния на нее внешних процессов [6]. Эта статическая модель была расширена в работах Эванса [7], Самуэльсона [8], [9] и Аллена [10].

Современные рыночные модели могут быть описаны различными способами. Например, различными типы уравнений или неравенств. В следующих статьях [11] – [14] представлены современные результаты исследований подобных задач. Методы, представленные в данных статьях, основаны на результатах теорий дифференциального анализа и накрывающих отображений. Теоретические результаты, полученные в представленных ранее работах, имеют важное прикладное значение.

[1] *Работа выполнена Никаноровым С.О. при финансовой поддержке гранта РНФ (проект №20-11-20131, https://rscf.ru/project/20-11-20131/). Работа выполнена Павловой Н.Г. при финансовой поддержке гранта РНФ (проект № 23-11-20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/).*

В своей работе мы исследовали модель рынка, которая описывается системой дифференциальных и алгебраических уравнений. Был получен критерий существования положения равновесие в представленной модели. В данной работе была исследована модель двухсекторной рыночной системы, где уравнения спроса и предложения задаются линейными дифференциальными уравнениями. Рассмотрен частный случай, когда задача сводится к решению системы линейных дифференциальных и алгебраических уравнений.

1. Описание модели

Рассмотрим математическую модель рынка двух товаров.

Пусть заданы векторы $p_i = (p_1, p_2) \in R_+^2$ – цены на товары, $\dot{p}_i = (\dot{p}_1, \dot{p}_2) \in R^2$ – скорости изменения цен на эти товары. Также заданы матрицы $A = \{a_{ij}\} \in R^2, B = \{b_{ij}\} \in R^2, H = \{h_{ij}\} \in R^2$,

$O = \{o_{ij}\} \in R^2, \forall i, j = 1,2$.

Имеются естественные ограничения на время, цены:

причем $d_1 = \min p_i\,, d_2 = \max \mathrm{p_i}$ – соответственно минимальная и максимальная возможные цены единицы i-го товара для i=1,2, $d_1 < \ d_2$;

и скорость изменения цен товаров соответственно:

$$\dot{p}_i \in [v_1, v_2],$$

Для i=1,2. Пусть

$$\hat{v}_i = \max_{i=1,2}(|v_1|, |v_2|),$$

$$\check{v}_i = \min_{i=1,2}(|v_1|, |v_2|).$$

Под математической моделью рынка будем понимать набор, который однозначно описывает модель:

$$\sigma = (\ \dot{p_\iota}, p_i, A, B, H, O) \in R_+^2 \times R^2 \times R^2 \times R^2 \times R^2 \times R^2.$$

Совокупный спрос на упомянутые выше товары представлен отображением

$$D: \Omega \times R_+^n \times [t_0, T] \to R^n, D = D_i\big(\dot{p}(t), p(t)\big),$$

где $D_i(\dot{p}(t), p(t)), i = 1,2$ – количество i-го товара, приобретенного в момент времени t.

Совокупный объем предложения на упомянутые выше товары представлен отображением

$$S: \Omega \times R_+^n \times [t_0, T] \to R^n, S = S_i\big(\dot{p}(t), p(t)\big),$$

где $S_i(\dot{p}(t), p(t)), i = 1,2$ – количество i-го товара, произведенного и размещенного на рынке в момент времени t.

В рассматриваемой модели функции спроса и предложения задаются следующими уравнениями:

$$D(\dot{p}, p) = A\dot{p} + Bp,$$

$$S(\dot{p}, p) = H\dot{p} + Op.$$

Таким образом задача нахождения положения равновесия заключается в нахождении точек совпадения отображений D и S. То есть нахождению решения уравнения

$$\mathrm{A\dot{p} + Bp = H\dot{p} + Op}, \tag{1}$$

с начальным условием

$$p(0) = p_0. \tag{2}$$

2. Достаточные условия существования положения равновесия

Решение системы (1), (2) сводится к решению системы линейных дифференциальных уравнений. Однако в случае, если $\det(A - H) = 0$, например $A - H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, система примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{p} + (B - O)p = 0.$$

Или

$$\begin{cases} \dot{p}_1 + (B-O)_{11}p_1 + (B-O)_{12}p_2 = 0 \\ (B-O)_{21}p_1 + (B-O)_{22}p_2 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Как не сложно заметить – система линейных дифференциальных уравнений становится системой, в которой одно уравнение алгебраическое, а второе дифференциальное.

Произведем замену $B - O = K$, получим

$$\begin{cases} \dot{p}_1 + K_{11}p_1 + \mathrm{K}_{12}p_2 = 0 \\ \mathrm{K}_{21}p_1 + \mathrm{K}_{22}p_2 = 0 \end{cases}.$$

Выразим из второго уравнения p_2.

$$\begin{cases} \dot{p}_1 + K_{11}p_1 + \mathrm{K}_{12}p_2 = 0 \\ p_2 = \dfrac{\mathrm{K}_{21}p_1}{\mathrm{K}_{22}} \end{cases}.$$

Соответственно первое уравнение примет вид

$$\mathrm{K}_{22}\dot{p}_1 + \mathrm{K}_{22}K_{11}p_1 + \mathrm{K}_{12}\mathrm{K}_{21}p_1 = 0.$$

Выполним преобразования полученного уравнения, получим

$$-\frac{dp_1}{(K_{22} + K_{12}K_{21})p_1} = \frac{dt}{K_{22}}.$$

Получим решение дифференциального уравнения

$$p_1 = e^{-\frac{K_{12}K_{21}t}{K_{22}} - t - \frac{C(-K_{22}-K_{12}K_{21})}{K_{22}+K_{12}K_{21}}}.$$

Решим задачу Коши, подставим начальные условия. Получим при $p(0) = p_0$

$$p_{1_0} = \frac{1}{e^{\frac{C(-K_{22}-K_{12}K_{21})}{K_{22}+K_{12}K_{21}}}}.$$

Следовательно $C = \ln(p_0)$ и

$$p_1 = e^{-\frac{K_{12}K_{21}t}{K_{22}} - t - \frac{\ln(p_0)(-K_{22}-K_{12}K_{21})}{K_{22}+K_{12}K_{21}}}.$$

Отсюда

$$p_2 = \frac{K_{21}e^{-\frac{K_{12}K_{21}t}{K_{22}} - t - \frac{\ln(p_0)(-K_{22}-K_{12}K_{21})}{K_{22}+K_{12}K_{21}}}}{K_{22}}.$$

Таким образом, если $p_i \in [d_1, d_2]$ и $t \in [t_0, T]$ мы получаем критерий существования положения равновесия в представленной модели.

Теорема. Пусть в модели (1), (2) $p_i \in [d_1, d_2]$ и $t \in [t_0, T,$. Тогда если

$$p_1 = e^{-\frac{K_{12}K_{21}t}{K_{22}} - t - \frac{\ln(p_0)(-K_{22}-K_{12}K_{21})}{K_{22}+K_{12}K_{21}}},$$

$$p_2 = \frac{K_{21}e^{-\frac{K_{12}K_{21}t}{K_{22}} - t - \frac{\ln(p_0)(-K_{22}-K_{12}K_{21})}{K_{22}+K_{12}K_{21}}}}{K_{22}},$$

то система (3) имеет решение, а, следовательно, в модели существует положение равновесия.

3. Заключение

Исследование математических моделей экономических процессов является важной прикладной задачей. В частности, задача нахождения условий существования положения равновесия в системе. Однако, современные системы сложны и велики. Такие выводы можно сделать на основе представленного исследования. Даже в частном случае двухсекторной модели можно заметить громоздкость вычислений. С увеличением размерности объемы вычислений и сложность модели возрастают нелинейно.

Литература

1. *Smith*. An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations. – London: W. Strahan and T. Cadell. Press, 1776, 1152 p.
2. *Malthus T.R.* An Essay on the Principle of Population. // Oxfordshire, England: Oxford World's Classics, 2010, p. 13.
3. *Ricardo D.* On the Principles of Political Economy and Taxation. – London: John Murray, 1817.
4. *Say J.-B.*A Treatise on Political Economy. – Georgetown: Joseph Milligan, 1817.
5. *Bastiat F.* Oeuvres complètes de Frédéric Bastiat. – Paris: T. 1. Correspondance. Mélanges, 1855, p. 232.
6. *Walras L.* Elements d'Economie Politique Pure. –Lausanne: Corbaz, 1874.
7. *Evans G.C.* Mathematical introduction to economics. –McGraw-Hill: New York, 1930.
8. *Samuelson P.A.* Economics: An Introductory Analysis. –McGraw-Hill: New York, 1948.
9. *Samuelson P.A.* Foundations of Economic Analysis. –Harvard University Press, 1947.
10. *Allen R.G.D.* Mathematical Economics. –2nd edn. Macmillan and Co. LTD: New York, 1960.
11. *Arutyunov V., Zhukovskiy S.E., and Pavlova N.G.* Equilibrium price as a coincidence point of two mappings // Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vol. 53, 2013, pp. 158–169.
12. *Kotyukov M., and Pavlova N.G.* Equilibrium in Dynamic Market Models with Known Elasticity // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 269, 2023, pp. 847–852.
13. *Avakov E.R., Arutyunov A.V., and Zhukovskiy E.S.* Covering mappings and their applications to differential equations unsolved for the derivative // Differential Equations, Vol. 45, 2009, pp. 627–649.
14. *Arutyunov et al.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications, Vol., 5, No. 1, 2009, pp. 5–16.