МЕТОД ЦИФРОВИЗАЦИИ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ

Лукацкий А.М., Дубынин Е.В.
Институт энергетических исследований РАН, Москва, Россия
lukatskii.a.m.math@mail.ru, 0667570@gtmail.com

Аннотация. Рассматривается проблема цифрового представления полилинейных моделей. Ранее была предложена табличная форма их описания, которая включает разделы переменных, мономов и полилинейных функций. По ней автоматически генерируется задача математического программирования. Цифровое представление позволяет ввести бинарное отношение между полилинейными моделями по принципу "ослабления".

Ключевые слова: полилинейные модели, задача полилинейного программирования, табличное описание алгоритмов, ослабление алгоритма.

Введение

Цифровизация технологий является весьма актуальной проблемой в настоящее время [1-3]. В этой связи, возникает задача цифрового представления моделей из различных предметных областей. Здесь можно выделить класс полилинейных моделей, описываемых системами ограничений из полилинейных функций (ПФ) от переменных модели. Таковыми являются, например, макроэкономические модели балансового типа [4]. Они приводят к задачам полилинейного программирования (ПП). Основным методом их решения служит обобщенный метод релаксаций (ОМР) [5]. Реализация ОМР имеется в программном комплексе CREATOR-DIGGER [6] и основана на описании задачи ПП в виде иерархического набора взаимосвязанных полилинейных функций (ПФ).

Для определенного класса полилинейных моделей удобным оказывается описание задачи ПП в виде одной сводной таблицы. Такая форма представления задачи ПП предложена в [5]. Она включает в себя разделы:

- переменных,
- мономов,
- полилинейных функций.

Пользователь работает с этой формой в экранном редакторе, причем ввод и коррекция касается одной сводной таблицы. Он может модифицировать описание задачи ПП в том числе параметры модели, а также ее структуру.

По описанной форме автоматически генерируются как структуры данных задачи ПП, так и алгоритмы ее обработки.

1. Непроцедурное описание полилинейной модели

Формой представления задачи ПП является сводная таблица *T*, которая имеет следующую структуру.

Таблица 1. Общее описание полилинейной модели

	$monomial_1$	. . .		$monomial_t$	*free term*
$variable_1$	1	. . .		0	
. . .	. . .	. . .		. . .	
$variable_n$	0	. . .		1	
$indicator_1$	6			-3	7
. . .	. . .	. . .		. . .	. . .
$indicator_m$	-1			8	-10
criterion	-2			4	3

Заполнение клеток в таблице 1 носит иллюстративный характер.

Построение задачи ПП по описанию в таблице 1 дано в [7].

Работая в экранном редакторе с таблицей *T*, пользователь может вводить и корректировать ее ячейки. При этом он должен соблюдать следующие соглашения.

- в ячейки $variable_i \times monomial_j$ можно вводить только значения 0 или 1, а также заменять одно такое значение на другое в процессе коррекции;

- в ячейки $indicator_i \times monomial_j$ можно вводить вещественные числа, а также заменять одно число на другое в процессе коррекции;
- в ячейки $criterion \times monomial_j$ можно вводить вещественные числа, а также заменять одно число на другое в процессе коррекции. Если в полилинейной задаче отсутствует критерий (требуется найти любое допустимое решение), то эта строка не заполняется;
- в столбец free term можно вводить и корректировать вещественные числа, но только для строк $indicator_i$ и *criterion*.

2. Нормализация табличного представления полилинейной модели

Здесь предположим, что для каждой переменной модели имеются двусторонние диапазонные ограничения:

$$a_k \le variable_k \le b_k \,, 1 \le k \le n. \tag{1}$$

Применим преобразования сдвига и масштабирования $w_k = (variable_k - a_k) / (b_k - a_k)$, $1 \le k \le n$.

Они приводят диапазонные ограничения (1) к нормализованному виду:

$$0 \le w_k \le 1, 1 \le k \le n. \tag{2}$$

После соответствующего пересчета коэффициентов и свободный членов, система ограничений задачи ПП и критерий приобретают следующий вид.

Полилинейные ограничения:

$$pol_l = a_1^l * mon_1 + \cdots + a_t^l * mon_t + c_l \ge 0 \,, \; 1 \le l \le m, \tag{3}$$

критерий:

$$obj = a_1 * mon_1 + \cdots + a_t * mon_t + c.. \tag{4}$$

Система ограничений (2-4) определяет задачу ПП*, назовем ее нормализованной.

С ней можно связать задачу линейного программирования ЛП*, переменными которой служат символы мономов полилинейной задачи ПП* mon1, …, mont с диапазонными ограничениями на эти переменные

$$0 \le mon_l \le 1, \; 1 \le l \le t, \tag{5}$$

ограничениями (3) и критерием (4).

Утверждение 1.

1. Если задача ЛП* (4-5) несовместна, то несовместна и задача ПП*(2-4).
2. Если задача ПП* (2-4) совместна, то совместна и задача ЛП*(4-5). Пусть max *LP* и min *LP* максимальное и минимальное значения критерия *obj* ЛП* задачи (4-5). Тогда критерий задачи ПП* будет лежать в диапазоне

$$\min LP \le \; obj \le \max LP. \tag{6}$$

Оно вытекает из того свойства, что любое решение полилинейной задачи ПП* (2-4) определяет решение задачи линейного программирования ЛП*(4-5), обратное же неверно.

3. Введение бинарного отношения на классе полилинейных моделей

Определение 1.

Задача ПП*$_2$ является ослаблением задачи ПП*$_1$, если

1. У этих задач совпадают наборы переменных.
2. Любое решение задачи ПП*$_1$ является решением задачи ПП*$_2$.

Обозначим это отношение: ПП*$_1 \subset$ ПП*$_2$.

Непосредственно поверяется, что оно рефлексивно, транзитивно, но не симметрично, т.е. не является отношением эквивалентности.

Утверждение 2.

Пусть имеются две задачи ПП: ПП*$_1$ и ПП*$_2$ с общим набором переменных в нормализованной форме представления (2-4).

Пусть для каждого ограничения p задачи ПП*$_2$ имеется ограничение q задачи ПП*$_1$ такое, что

1. Для каждого монома в p коэффициент при нем в q не больше, чем в p (в том числе, если коэффициент при мономе в q нулевой, то в p он должен быть неотрицательный).

2. Свободный член в p не меньше, чем в q.

Тогда задача ПП*$_2$ является ослаблением задачи ПП*$_1$.

Следствие 1.

Пусть задача ПП*$_1$ является линейной (все мономы имеют 1-ю степень), совместной (имеющей допустимое решение), и имеется полилинейная задача ПП*$_2$, причем задача ПП*$_2$ является ослаблением задачи ПП*$_1$. Тогда

1. ЛП задачу ПП* $_1$ можно использовать для поиска допустимого решения полилинейной задачи ПП*$_2$.
2. Максимум критерия ЛП задачу ПП*$_1$ дает оценку снизу максимума критерия полилинейной задачи ПП*$_2$.

Примечание 1.

Понятие ослабления применительно к алгоритмам введено в [8, с.669] для задачи поиска кратчайших путей на графе.

Примечание 2.

Основным методом решения задачи ЛП является симплекс алгоритм [9]. Альтернативным является метод ортогональных проекций (свертывания системы линейных неравенств) [10].

4. Примеры решения задач ПП с использованием бинарного отношения ослабления

Приведем примеры решения задач ПП путем сведения к более сильным ЛП задачам. Они подобраны таким образом, что применение ОМР приводит к преждевременным остановам в паретовых точках [11].

Пример 1.

Пусть имеется 3-х мерное пространство $\mathbf{R}^3$ с координатами (x,y,z) и задана система полилинейных ограничений:

$$\begin{gathered} pol_1 = xy - \frac{1}{2} \geq 0, \\ pol_2 = xz - \frac{1}{2} \geq 0, \\ pol_3 = yz - \tfrac{1}{2} \geq 0, \\ pol_4 = xy + xz + yz - \frac{9}{5} \geq 0, \\ pol_5 = -x - y - z + \frac{12}{5} \geq 0, \\ pol_6 = x + y + z + \frac{12}{5} \geq 0, \\ -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1. \end{gathered} \tag{7}$$

Требуется найти любое допустимое решение полилинейной задачи (7), т.е. критерий при нахождении решения отсутствует.

Решение.

Представление полилинейной задачи (7) в табличной форме имеет вид.

Таблица 2. Описание полилинейной модели (7)

	monomial$_1$	***monomial***$_2$	***monomial***$_3$	***monomial***$_4$	***monomial***$_5$	***monomial***$_6$	***free term***
x	1	1	0	1	0	0	
y	1	0	1	0	1	0	
z	0	1	1	0	0	1	
pol_1	1	0	0	0	0	0	-1/2
pol_2	0	1	0	0	0	0	-1/2
pol_3	0	0	1	0	0	0	-1/2
pol_4	1	1	1	0	0	0	-9/5
pol_5	0	0	0	-1	-1	-1	12/5
pol_6	0	0	0	1	1	1	12/5

Приведем полилинейную систему (7) к нормализованному виду. Сделаем замену переменных:

$$u = (x+1)/2,\ v = (y+1)/2,\ w = (z+1)/2.$$

Получаем нормализованную полилинейную систему ПП*$_1$

$$pol_1 = (2u-1)(2v-1) - \frac{1}{2} = -2u - 2v + 4uv + \frac{1}{2} \geq 0,$$
$$pol_2 = (2u-1)(2w-1) - \frac{1}{2} = -2u - 2w + 4uw + \frac{1}{2} \geq 0,$$
$$pol_3 = (2v-1)(2w-1) - \frac{1}{2} = -2v - 2w + 4vw + \frac{1}{2} \geq 0,$$
$$pol_4 = (2u-1)(2v-1) + (2u-1)(2w-1) + (2v-1)(2w-1) - \frac{9}{5} =$$
$$= -4u - 4v - 4w + 4uv + 4uw + 4vw + \frac{6}{5} \geq 0, \qquad (8)$$
$$pol_5 = -(2u-1) - (2v-1) - (2w-1) + \frac{12}{5} = -2u - 2v - 2w + \frac{27}{5} \geq 0,$$
$$pol_6 = (2u-1) + (2v-1) + (2w-1) + \frac{12}{5} = 2u + 2v + 2w - \frac{3}{5} \geq 0,$$
$$0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1.$$

По полилинейной задаче (8) можно построить линейную задачу ЛП*$_1$.

$$lin_1 = -u - v + \frac{1}{4} \geq 0,$$
$$lin_2 = -u - w + \frac{1}{4} \geq 0,$$
$$lin_3 = -v - w + \frac{1}{4} \geq 0,$$
$$lin_4 = -u - v - w + \frac{3}{10} \geq 0, \qquad (9)$$
$$lin_5 = -u - v - w + \frac{27}{10} \geq 0,$$
$$lin_6 = u + v + w - \frac{3}{10} \geq 0,$$
$$-1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1, -1 \leq w \leq 1.$$

Согласно утверждению 2 задача ПП*$_1$ является ослаблением задачи ЛП*$_1$. Из следствия 1 решение ЛП*$_1$ будет решением ПП*$_1$. Из линейной задачи (9), находим одно из допустимых решений ЛП*$_1$, оно дает допустимое решение полилинейной задачи ПП*$_1$: $u = 1/10$, $x = (2u\text{-}1) = -4/5$, $v = 1/10$, $y = (2v\text{-}1) = -4/5$, $w = 1/10$, $z = (2w\text{-}1) = -4/5$.

Пример 2.

Рассмотрим полилинейную задачу с критерием.

$$pol_1 = xy - \frac{1}{2} \geq 0,$$
$$pol_2 = xz - \frac{1}{2} \geq 0,$$
$$pol_3 = yz - \frac{1}{2} \geq 0, \qquad (10)$$
$$pol_4 = -x - y - z + \frac{9}{4} \geq 0,$$
$$pol_5 = x + y + z + \frac{9}{4} \geq 0,$$
$$-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1.$$
$$obj = xy + xz + yz \rightarrow max.$$

Дадим оценку критерия снизу.

Решение.

Таблица описания полилинейной задачи ПП*$_2$ имеет вид.

Таблица 3. Описание полилинейной модели (10)

	monomial$_1$	***monomial***$_2$	***monomial***$_3$	***monomial***$_4$	***monomial***$_5$	***monomial***$_6$	***free term***
x	1	1	0	1	0	0	
y	1	0	1	0	1	0	
z	0	1	1	0	0	1	
pol$_1$	1	0	0	0	0	0	-1/2
pol$_2$	0	1	0	0	0	0	-1/2
pol$_3$	0	0	1	0	0	0	-1/2
pol$_4$	0	0	0	-1	-1	-1	9/4
pol$_5$	0	0	0	1	1	1	9/4
criterion	1	1	1	0	0	0	0

Преобразованиями аналогичными приведеннымЬ выше получим линейную задачу ЛП*$_2$.

$$
\begin{gathered}
lin_1 = -u - v + \frac{1}{4} \geq 0, \\
lin_2 = -u - w + \frac{1}{4} \geq 0, \\
lin_3 = -v - w + \frac{1}{4} \geq 0, \\
lin_4 = -u - v - w + \frac{21}{8} \geq 0, \\
lin_5 = u + v + w - \frac{3}{8} \geq 0, \\
\mathrm{c} = -4u - 4v - 4w + 3 \rightarrow max, \\
0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1.
\end{gathered} \tag{11}
$$

Решение этой линейной задачи имеет вид: u = 1/8, x = (2u-1) = -3/4 , v = 1/8, y = (2v-1) = -3/4 , w = 1/8, z = (2w-1) = -3/4. Отсюда получаем значение критерия полилинейной задачи ПП*$_2$:

$$
obj = xy + xz + yz = \frac{27}{16}, \tag{12}
$$

которое дает оценку оптимума критерия снизу.

Заметим, что из симметричности ограничений и критерия задачи ПП*$_2$ оптимум достигается, когда x=y=z. Это дает две точки оптимума:

(3/4,3/4,/3/4) и (-3/4,-3/4,-/3/4).

Таким образом, значение (12) дает не только оценку, но и сам абсолютный экстремум задачи ПП*$_2$.

5. Программная реализация

Описанный комплекс реализован в среде Microsoft Visual Studio на языке под операционной системой WINDOWS-10. Был использован язык программирования Visual Basic. Описания программного обеспечения как самостоятельного метода математического программирования оформлено авторским свидетельством – [12].

6. Сравнение с аналогами

В качестве аналогов описанной выше программы можно указать технологию системы CREATOR-DIGGER [4]. Описанный в докладе комплекс имеет преимущества при генерации неоднородных моделей, в которых основными являются скалярные показатели, а при наличии векторных и матричных характеристик, операции над их фрагментами не выполняются в виде векторно-матричных. Он позволяет также производить сравнение различных задач ПП по принципу ослабления ограничений.

7. Заключение

Табличное представление позволяет получить наглядное цифровое описание полилинейной модели. Оно позволяет также ввести бинарное отношение между полилинейными моделями по принципу ослабления задач ПП. Таким образом, удается сравнивать различные модели. Для класса полилинейных моделей, имеющих табличную форму представления, используя введенное бинарное отношение, в ряде случаев можно провести редукцию решения исходной задачи ПП к аналогичному, но более простого вида. Последнее дает возможность оценить оптимальное значения критерия исходной задачи или найти допустимое решение. В отдельных случаях это позволяет осуществить переход от решения задачи ПП к решению задачи ЛП. Преимущество редукции задачи ПП к задаче ЛП состоит в том, что последняя дает возможность гарантированно находить допустимое и оптимальное решение, причем за более короткое время и с большей точностью, чем аналогичное для задачи ПП.

Литература

1. *Вишневский К.О.* Цифровые технологии в российской экономике / К.О. Вишневский, Л.М. Гохберг, В.В. Дементьев и др.; под ред. Л.М. Гохберга; Нац. исслед. ун-т. «Высшая школа экономики». – М.: НИУ ВШЭ, 2021. – 116 с.
2. *Пашкин С.А.* Развитие цифровых платформ в России// Международный научно-исследовательский журнал. Социальные и гуманитарные науки. Экономика. Менеджмент. — Выпуск 1 (139). — 2024. — DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2024.139.47.
3. *Резчиков А.Ф., Цвиркун А.Д., Дранко О.И., Степановская И.А. и др.* Цифровая платформа мониторинга углеродного следа // Труды 15-й международной конференции MLSD2022. М.: ИПУ РАН. —. 2022 —. С. 1305—1310. DOI: 10.25728/mlsd.2022.
4. *Lukatskii A M.; Malakhov V.A.* Computer System of Organization of Multilinear Optimization Calculations on Models of Balance Type // Published in: 2020 13th International Conference "Management of large-scale system development" (MLSD). Date of Conference: 28-30 Sept. 2020, Date Added to IEEE Xplore: 09 November 2020, DOI: 10.1109/MLSD49919.2020.9247831. Publisher: IEEE Publication Year: 2020, Page(s): 1—5.
5. *Лукацкий А.М., Шапот Д.В.* Методы решения задач полилинейного программирования // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. т. 41. №. 5. — С. 680—691.
6. *Карбовский И.Н.* Технология полилинейного программирования в естественно-обусловленных моделях. I // Автоматика и телемеханика. 2014. № 9. — С. 83—96.
7. *Lukatskii A.M.* A Software Complex of Preparation for Solving a Multilinear Programming Problem // Published in: 2021 14th International Conference Management of large-scale system development (MLSD), Date of Conference: 27-29 September 2021, Date Added to IEEE Xplore: 22 November 2021, DOI: 10.1109/MLSD52249.2021.9600165. Publisher: IEEE Publication Year: 2021, Page(s): 1—5.
8. *Кормен Т.* Алгоритмы. Построение и анализ. —2-ое издание, пер. с англ. / Т. Кормен, Ч. Лейсерсон, Р. Ривест, К. Штайн. — М.: Издательский дом “Вильямс”, 2011. — 1296 с.
9. *Bosco J., Etoa E.* New optimal pivot rule for the simplex algorithm //Advances in Pure Mathematics. 2016. Vol. 6 — P. 647-658.
10. *Lukatskii A.M.* On One Approach to Elimination of Weak Inequalities in the Procedure of Convolution of Systems of Linear Inequalities // Published in: 2022 15th International Conference Management of large-scale system development (MLSD), Date of Conference: 27-29 September 2022, Date Added to IEEE Xplore: 09 November 2022, DOI: 10.1109/MLSD55143.2022.9934134. Publisher: IEEE Publication Year: 2022, Page(s): 1—5.
11. *Лотов А.В., Рябиков А.И.* Дополненный метол стартовой площадки для аппроксимации границы Парето в задачах с многоэкстремальными критериями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. т. 61. №. 10. — С. 1734—1744.
12. *Лукацкий А.М., Шапот Д.В.* MULTILINPROGRAM // Сертификат государственной регистрации компьютерной программы. 2018. 13 августа. N. 2018619802.