# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СЕДЛОВЫХ И ОБОБЩЕННЫХ СЕДЛОВЫХ ТОЧЕК НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

**Арутюнов А.В., Жуковская З.Т., Жуковский С.Е.**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия*

arutyunov@cs.msu.ru, zyxra2@yandex.ru, s-e-zhuk@yandex.ru

*Аннотация. В работе изучается понятие обобщенной седловой точки. Приведены и доказаны элементарные свойства обобщенных седловых точек непрерывных функций. Показано, что обобщенные седловые точки устойчивы к малым по норме равномерной сходимости возмущениям функции. Получены утверждения об оценках производной рассматриваемых функций.*

*Ключевые слова: седловая точка, обобщенная седловая точка, устойчивость.*

## Введение

В настоящей работе рассматривается вопрос об устойчивости седловой точки функции двух переменных. Пусть заданы компактные множества $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^n$ и непрерывная функция $f: X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$. Седловой точкой функции $f$ называется точка $(\xi_1, \xi_2) \in X_1 \times X_2$ такая, что

$$f(\xi_1, x_2) \le f(\xi_1, \xi_2) \le f(x_1, \xi_2) \ \ \forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2.$$

Известно, что если множества $X_1, X_2$ выпуклы, а функция $f$ выпукла по первому переменному и вогнута по второму переменному, то функция $f$ имеет седловую точку.

Представляется естественным следующий вопрос. Верно ли, что если функция $f$ имеет седловую точку, то при достаточно малом по норме равномерной сходимости возмущении $g$ возмущенная функция $f + g$ имеет седловую точку? Иными словами, устойчивы ли седловые точки к малым по норме равномерной сходимости возмущениям функции $f$? Известно (см., например, [1]), что ответ на этот вопрос отрицательный. Проиллюстрируем сказанное примером.

Пусть

$$X_1 = X_2 = [-1,1], \qquad f(x_1, x_2) = x_1 x_2.$$

Тогда, из определения седовой точки вытекает, что единственной седловой точкой функции $f$ является точка нуль.

Для каждого натурального $i$ положим

$$g_i(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{i}.$$

Тогда

$$max_{x_2 \in X_2}\big(f(\xi_1, x_2) + g_i(x_1, x_2)\big) = |\xi_1| + \frac{1}{i} > -|\xi_2| + \frac{\xi_2^2}{i} = min_{x_1 \in X_1}\big(f(x_1, \xi_2) + g_i(x_1, \xi_2)\big)$$

для любых точек $(\xi_1, \xi_2) \in X_1 \times X_2$ и для любого $i$. Следовательно, функция $f + g_i$ не имеет седловых точек.

Отметим, что приведенный пример показывает неустойчивость седловых точек даже в случае, когда для функции $f$ выполнены предположения теоремы существования.

В настоящей работе мы приведем понятие обобщенной седловой точки из [1], изучим ее свойства и докажем, что в отличии от “обычной” седловой точки обобщенная седловая точка устойчива. Будут изучены топологические свойства многозначного отображения, которое ставит в соответствие непрерывной функции $f$ множество её обобщенных седловых точек. Будет показано, что это многозначное отображение полунепрерывно сверху, но не непрерывно.

[1] *Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00042, https://rscf.ru/project/22-11-00042/)*

Кроме того, в случае, когда рассматриваемая функция достаточно гладка, будут приведены оценки её производной. Кроме того, будет сформулирован аналог неравенства среднего значения для функции, обладающей седловой точкой.

## 1. Основные результаты

Определим понятие обобщенной седловой точки. Для этого сначала положим

$$\Psi(\xi_1,\xi_2) = max_{x_2\in X_2} f(\xi_1,x_2) - min_{x_1\in X_1} f(x_1,\xi_2), \quad (\xi_1,\xi_2) \in X_1 \times X_2.$$

Обсудим свойства функции $\Psi$.

Из теоремы о непрерывной зависимости экстремумов от параметров следует, что функция $\Psi$ непрерывна. Из определения функции $\Psi$ следует, что эта функция неотрицательна. Действительно, поскольку

$$max_{x_2\in X_2} f(\xi_1,x_2) \ge f(\xi_1,\xi_2) \ge min_{x_1\in X_1} f(x_1,\xi_2),$$

то $\Psi(\xi_1,\xi_2) \ge 0$ для любого $(\xi_1,\xi_2) \in X_1 \times X_2$.

Кроме того, точка $(\xi_1,\xi_2)$ является седловой тогда и только тогда, когда

$$\Psi(\xi_1,\xi_2) = 0.$$

Действительно, точка $(\xi_1,\xi_2)$ является седловой тогда и только тогда, когда

$$max_{x_2\in X_2} f(\xi_1,x_2) = f(\xi_1,\xi_2) = min_{x_1\in X_1} f(x_1,\xi_2),$$

а это равносильно тому, что $\Psi(\xi_1,\xi_2) = 0$.

Из приведенных рассуждений вытекает следующее утверждение: точка $(\xi_1,\xi_2)$ является седловой тогда и только тогда, когда она является точкой минимума функции $\Psi$ и, более того, $\Psi(\xi_1,\xi_2) = 0$.

**Определение 1.** Точку $(\xi_1,\xi_2) \in X_1 \times X_2$ будем называть обобщенной седловой точкой функции $f$, если в этой точке достигается минимум функции $\Psi$.

Для функции $f$ обозначим через $GSP(f)$ множество обобщенных седловых точек. Из приведенного определения следует, что каждая седловая точка является обобщенной седловой точкой. Обратное, вообще говоря, неверно.

Сформулируем утверждения о свойствах обобщенных седловых точек. Отметим, что приведенная ниже теорема 1 гарантирует устойчивость обобщенных седловых точек.

**Теорема 1.** Справедливы следующие утверждения.

Множество GSP(f) замкнуто и непусто.

Множество GSP(f) представимо в виде декартового произведения некоторого подмножества в $\mathrm{X}_1$ на некоторое подмножество в $\mathrm{X}_2$.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любой непрерывной функции $\mathrm{g}: \mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2 \to \mathbb{R}$, для которой

$$\|g\| \coloneqq max\{|g(x_1,x_2)| : \ (x_1,x_2) \in X_1 \times X_2\} < \delta,$$

имеет место включение

$$GSP(f+g) \subset O(GSP(f),\varepsilon).$$

Здесь $O(GSP(f),\varepsilon)$ – это открытая $\varepsilon$-окрестность множества $GSP(f)$.

**Доказательство.** По теореме Вейерштрасса из предположений компактности области определения и непрерывности функции $\Psi$ следует, что обобщенная седловая точка у функции $f$ существует. Значит, $GSP(f)$ непусто. Кроме того, множество точек минимума $GSP(f)$ непрерывной функции $\Psi$ замкнуто. Первое утверждение теоремы доказано.

Из определения функции $\Psi$ следует, что она является суммой функций, первая из которых зависит только от $x_1$, а вторая – только от $x_2$. Поэтому множество $GSP(f)$, которое является множеством точек минимума функции $\Psi$ представимо в виде декартового произведения множества точек минимума указанной функции переменного $x_1$ и указанной функции переменного $x_2$. Второе утверждение теоремы доказано.

Докажем теперь третье утверждение теоремы об устойчивости обобщенной седловой точки. Предположим противное: для любого натурального $i$ существует непрерывная функция $g_i: X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\|g_i\| < \frac{1}{i} \quad \forall\, i$$

и $GSP(f+g_i)$ не лежит в $O(GS(f),\varepsilon)$. Тогда при каждом i существует точка

$$\xi^i = (\xi_1^i, \xi_2^i) \in GSP(f+g_i)$$

такая, что $\xi^i \notin O(GSP(f),\varepsilon)$.

Поскольку множество $X_1 \times X_2$ компактно, то переходя к подпоследовательности получаем, что $\xi^i$ сходится к некоторой точке $\hat{\xi} \in X_1 \times X_2$. При этом, очевидно,

$$\hat{\xi} \notin O(GSP(f),\varepsilon).$$

Покажем теперь, что $\hat{\xi}$ – это точка минимума функции Ψ. Действительно, поскольку имеет место включение $\xi^i \in GSP(f+g_i)$, то

$$max_{x_2\in X_2}(f+g_i)(\xi_1^i, x_2) - min_{x_1\in X_1}(f+g_i)(x_1,\xi_2^i) \le max_{x_2\in X_2}(f+g_i)(\xi_1,x_2) - min_{x_1\in X_1}(f+g_i)(x_1,\xi_2)$$

для любых $(\xi_1,\xi_2) \in X_1 \times X_2$. Поэтому переходя в последнем неравенстве к пределу при $i \to +\infty$ при каждом $(\xi_1,\xi_2) \in X_1 \times X_2$ получаем, что

$$\Psi(\hat{\xi}) \le \Psi(\xi) \ \ \forall \xi = (\xi_1,\xi_2) \in X_1 \times X_2.$$

Следовательно, $\hat{\xi}$ – это точка минимума функции Ψ. Значит $\hat{\xi} \in GSP(f)$. Но выше было показано, что $\hat{\xi} \notin O(GSP(f),\varepsilon)$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 1.

Если функция $f$ имеет единственную обобщенную седловую точку, то из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

**Следствие 1.** Пусть заданы непрерывные функции $f_i: X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$, которые сходятся равномерно к $f$,пусть $\xi^i \in X_1 \times X_2$ – это некоторые обобщенные седловые точки функций $f_i$. Предположим, что функция $f$ имеет единственную обобщенную седловую точку $\xi \in X_1 \times X_2$.

Тогда $\xi^i \to \xi$ при $i \to +\infty$.

Теорема 1 применительно к “обычным” седловым точкам дает следующие утверждения.

**Следствие 2.** Пусть заданы непрерывные функции $f_i: X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$, которые сходятся равномерно к $f$. Предположим, что каждая функция $f_i$ имеет седловую точку $\xi^i \in X_1 \times X_2$, а функция $f$ имеет единственную седловую точку $\xi \in X_1 \times X_2$.

Тогда $\xi^i \to \xi$ при $i \to +\infty$.

**Следствие 3.** Пусть функция f не имеет седловой точки.

Тогда существует число $\delta > 0$ такое, что для любой непрерывной функции $g: X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$, для которой имеет место неравенство

$$\|g\| < \delta,$$

функция $f+g$ не имеет седловой точки.

Следствие 2 вытекает из теоремы 1, определения седловой точки и определения обобщенной седловой точки. Следствие 3 вытекает из следствия 2.

Прокомментируем утверждения теоремы 1.

Первое утверждение теоремы 1 можно интерпретировать так. Отображение $GSP$ является многозначным отображением, которое каждой непрерывной функции ставит в соответствие непустое замкнутое подмножество пространства $X_1 \times X_2$.

В терминах теории многозначных отображений третье утверждение теоремы 1 равносильно тому, что многозначное отображение $GSP$ полунепрерывно сверху.

Несложно привести пример, показывающий, что это многозначное отображение не полунепрерывно снизу. Таким образом, это многозначное отображение непрерывным не является. Тем не менее, из следствия 1 вытекает, что если для некоторой функции $f$ множество $GSP(f)$ одноточечено, то в точке $f$ многозначное отображение $GSP(f)$ непрерывно.

Из определения седловой точки следует, что если эта точка является внутренней для области определения, то в этой точке производная функции обращается в нуль. Для обобщенной седловой точки это утверждение не верно. Соответствующий пример дает функция $f_i$ из примера 1 в [1].

Тем не менее, используя известные неравенства среднего значения можно получить оценку производной в окрестности заданной обобщенной седловой точки. Отметим, что приведенные далее теорема 2 и следствие 4 не дают необходимых условий обобщенной седловой точки.

**Теорема 2.** Пусть функция $f$ непрерывна и непрерывно дифференцируема на внутренности своей области определения, $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in X_1 \times X_2$ – это точка, которая лежит во внутренности $X_1 \times X_2$ вместе с некоторой своей замкнутой r-окрестностью, $r > 0$.

Тогда во внутренности $X_1 \times X_2$ существует точка $z$, такая, что имеет место следующее неравенство

$$\|f'(z)\| \leq \frac{\Psi(\xi)}{r}.$$

Это утверждение вытекает из неравенства среднего значения в [2], примененного к функции $f$. Из этого неравенства следует, что во внутренности $X_1 \times X_2$ существует точка $z$, такая, что

$$\langle f'(z), v\rangle \leq \Psi(\xi) \;\; \forall v: \;\; |v| \leq r.$$

Здесь угловые скобки означают скалярное произведение. Если $f'(z) = 0$, то точка $z$ является искомой. Если же $f'(z) \neq 0$, то применяя полученное соотношение при

$$v = \frac{r}{|f'(z)|} f'(z),$$

получаем искомое неравенство в теореме 2.

Обсудим теорему 2. Если точка $\xi$ является седловой точкой функции $f$, то утверждение теоремы выполняется тривиально при $z = \xi$, поскольку в рассматриваемом случае $\Psi(\xi) = 0$.

Если точка $\xi$ является обобщенной седловой точкой функции $f$ и не является седловой точкой, то правая часть неравенства в теореме 2 положительна, а утверждение теоремы содержательно.

Из теоремы 2 вытекает следующее неравенство среднего значения для функций, обладающих седловыми точками.

**Следствие 4.** Пусть функция $f$ непрерывна и непрерывно дифференцируема на внутренности своей области определения, $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in X_1 \times X_2$ – это седловая точка, которая лежит во внутренности $X_1 \times X_2$ вместе с некоторой своей замкнутой $r$-окрестностью, $r > 0$.

Тогда для любой непрерывной функции $g: X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$, непрерывно дифференцируемой на внутренности своей области определения, существует точка $z$ во внутренности $X_1 \times X_2$ такая, что имеет место неравенство

$$|f'(z) + g'(z)| \leq 2\frac{\|g\|}{r}.$$

Для доказательства этого утверждения достаточно применить теорему 2 к функции $f + g$ в точке $\xi$ и воспользоваться тем, что поскольку для функции $f$ точка $\xi$ является седловой, то $\Psi(\xi) = 0$.

Приведенное следствие может быть обобщено на случай липшицевых функций f и $g$. В этом случае можно доказать аналогичное утверждение, в котором вместо классической производной используется обобщенная производная Кларка.

## 2. Заключение

Исследовано понятие обобщенной седловой точки. Показано, что в предположении непрерывности рассматриваемой функции и компактности ее области определения обобщенная седловая точка существует. При этом "обычная" седловая точка может не существовать.

Доказано, что обобщенная седловая точка устойчива к возмущениям, которые малы по норме равномерной сходимости. Приведен пример, показывающий, что седловые точки таким свойством не обладают.

Приведены следствия полученных основных результатов, применимые, в том числе, и к седловым точкам.

Установлены топологические свойства многозначного отображения, которое каждой непрерывной функции ставит в соответствие множество обобщенных седловых точек этой функции. А именно, показано, что это многозначное отображение является полунепрерывным сверху и не полунепрерывно снизу.

Рассмотрены гладкие функции $f$. В терминах использованной в работе вспомогательной функции $\Psi$ получены оценки производной функции $f$. Приведено неравенство среднего значения для гладкой функции, обладающей седловой точкой.

Полученные результаты могут использоваться для нахождения и исследования седловых точек и обобщенных седловых точек непрерывных и гладких функций.

Рассмотренная в работе задача является частным случаем задачи нахождения равновесия Нэша в некооперативной игре. Предложенные в настоящей работе методы исследования могут использоваться для получения условий существования и устойчивости обобщенного равновесия по Нэшу для таких игр.

## Литература


1. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E.* On stability of the generalized saddle points // Optimization. 2024. – P. 1–18.
2. *Кларк Ф.,Ледяев Ю.С.* Новые формулы конечных приращений // Доклады Академии наук. 1993. – Т. 331, N 3. – С. 275–277.