О ПОЛОЖЕНИИ РАВНОВЕСИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ РЫНКА

Котюков А.М.,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
amkotyukov@mail.ru
Павлова Н.Г.
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы, Москва, Россия
Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, Тамбов, Россия
natasharussia@mail.ru

Аннотация. Доклад посвящен исследованию динамических моделей рынка на предмет существования положения равновесия, которое рассматривается как точка совпадения условно накрывающего отображения и отображения, удовлетворяющего условию Липшица на некотором множестве.

Ключевые слова: положение равновесия, спрос, предложение, накрывающее отображение, точка совпадения.

Введение

Положение равновесия играет важную роль в изучении экономических процессов. Объясним смысл этого понятия на примере модели, рассмотренной в докладе. Пусть в моделируемом регионе имеется рынок товаров. На рынке присутствуют две группы участников – продавцы и покупатели. Продавцы поставляют товар на рынок и продают его покупателям, получая прибыль. Покупатели имеют некоторый бюджет, который они тратят на то, чтобы приобрести необходимый им товар и удовлетворить свои потребности. Совокупный объем каждого товара, который предлагается к продаже, мы назовем предложением этого товара, а совокупный объем всех предлагаемых товаров на рынке – предложением. Аналогично, совокупный объем товара, необходимый покупателям, мы назовем спросом на этот товар, а совокупный объем всех таких товаров на рынке – спросом. Нетрудно видеть, что долговечность такой системы обусловливается соотношением величин спроса и предложения на рынке. Рассмотрим все типы этого соотношения.

Если предложение превышает спрос, то на рынке возникает профицит, и у продавца после того, как все покупатели уже потратили свой бюджет, останется непроданный товар, который принесет им убытки (это может быть скоропортящийся, сезонный или технологически инновационный товар, который за короткий период времени теряет либо актуальность, либо товарный вид). Продавцы будут заинтересованы в том, чтобы компенсировать свои убытки. Если продавцы на рынке обладают рыночной властью, т.е. способностью влиять на цены на рынке, они могут поднять цены на товары на следующем цикле торгов. Если же нет, то они могут сократить заработную плату покупателям, которые работают на их предприятиях. Так или иначе, покупатели теряют свою покупательскую способность (т.е. возможность купить необходимые им товары), что приводит к еще большим убыткам со стороны продавцов. В итоге это приводит к тому, что покупатели на рынке не могут ничего купить, а продавцы не получают никакой прибыли, что приводит к застою экономики. Такая ситуация для нас является неблагоприятной.

С другой стороны, если спрос на рынке превышает предложение, то последствия для всего региона могут быть не только экономические, но и социально-политические. Возникший дефицит создает нездоровую конкуренцию среди покупателей, и в зависимости от моделируемого рынка негативные последствия могут быть различными. Например, на рынке еды это будет массовый голод, на рынке лекарств – эпидемии, на рынке строительных материалов – нехватка ресурсов для строения важных муниципальных объектов и другие. Таким образом, такая ситуация также является неблагоприятной.

Состояние рынка, при котором совокупный объем предлагаемых на рынке товаров равняется совокупному объему необходимых покупателям товаров на рынке, или же предложение равно спросу, называется положением равновесия, а цены, при которых такая ситуация возникла – равновесными.

Идеи о положении равновесия восходят еще к трудам знаменитого английского экономиста А. Смита [1]. Он первым описал процесс «нащупывания» цены, при котором продавцы и покупатели, конкурируя между собой, приводят цены к равновесным. Впоследствии эти идеи были развиты в работах других экономистов (см., например, [2–4]). Первые математические рассуждения по тематике положения равновесия были проведены Л. Вальрасом [5]. Вальрас предложил рассмотреть в системе рынка некоего «аукциониста», задача которого состояла в том, чтобы постепенно приводить цены на рынке в равновесное состояние, собирая информацию от участников торгов о ценах и объемах сделок.

На протяжении нескольких десятилетий работа Вальраса нашла развитие в трудах других ученых (см., например, [6, 7]).

Первые содержательные результаты об условиях существования положения равновесия были получены К. Эрроу и Ж. Дебре [8] для линейной модели рынка. В этой модели производители максимизировали свою прибыль при ограничениях на ресурсы производства, а покупатели максимизировали свою функцию полезности при ограничениях на бюджет. Впоследствии эта статическая модель была усовершенствована и исследована в работах Самуэльсона [9] и Эванса [10]. Современное развитие эта модель получила в работе [11]. Статические модели рынка исследовались и в других работах. Так, в [12] была исследована модель открытого рынка, в которой отображения спроса и предложения восстанавливались по соответствующим эластичностям спроса и предложения по цене. В работе [13] методами теории систем линейных уравнений и неравенств был исследован частный случай модели открытого рынка – модель закрытого рынка, в которой отсутствовал импорт товаров. В [14] аналогичные результаты были получены для динамической модели рынка.

Настоящий доклад посвящен исследованию новой динамической модели рынка, в которой отображения спроса и предложения имеют линейную структуру. Перейдем к постановке соответствующей задачи.

1. Постановка задачи

1.1. Описание модели

Рассмотрим рынок n товаров, цены на которые в период времени $[0,T], T>0$ описываются вектор-функцией цен $x:[0,T]\to P$, $x(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))$. Здесь $P=[c_{11},c_{21}]\times\dots\times[c_{1n},c_{2n}]$, где $c_1,c_2\in\mathbb{R}^n$ такие, что $c_1=(c_{11},\dots,c_{1n})$, $c_2=(c_{21},\dots,c_{2n})$, $0<c_{1i}<c_{2i}$ $\forall i=\overline{1,n}$, являются естественными ограничениями на цены. Пусть $0\ni\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – замкнутое множество, задающее ограничения на скорости изменения цен, т.е. $\dot{x}\in\Omega\,\forall t\in[0,T]$. Рассмотрим отображения спроса и предложения $D,S:\Omega\times P\to\mathbb{R}^n$:

$$S(\dot{x},x)=S_1\dot{x}+S_2x+S_3, D(\dot{x},x)=D_1\dot{x}+D_2x+D_3,$$

где $D_i,S_i\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $S_i=\left(s_{ijk}\right)_{j,k=\overline{1,n}}$, $D_i=\left(d_{ijk}\right)_{j,k=\overline{1,n}}$, $i=1{,}2$ – заданные матрицы, а $D_3,\ S_3\in\mathbb{R}^n$, $D_3=(d_{31},\dots,d_{3n})$, $S_3=(s_{31},\dots,s_{3n})$ – заданные векторы.

Определение 1.1. Динамической моделью Эванса–Самуэльсона–Вальраса назовем следующий набор параметров:

$$\sigma=(c_1,c_2,D_1,D_2,D_3,S_1,S_2,S_3).$$

1.2. Положение равновесия

Введем следующие обозначения. Обозначим $\tilde{c}=(c_1+c_2)/2$ и для чисел $a,b\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$, вектора $A\in\mathbb{R}^n$ и замкнутого множества $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ мы определим полное метрическое пространство $AC_\infty(A,[a,b],\Omega)$ таких абсолютно непрерывных функций $x:[0,T]\to P$, что $\dot{x}\in L_\infty([a,b],\Omega)$, $x(a)=A$ с метрикой

$$\rho_{AC_\infty(A,[a,b],\Omega)}(x_1,x_2)=\|x_1-x_2\|_{AC_\infty(A,[a,b],\Omega)}=\|\dot{x}_1-\dot{x}_2\|_{L_\infty([a,b],\Omega)}.$$

Определение 1.2. Пусть $\delta\in[0,T]$. Положением равновесия в модели σ на отрезке $[0,\delta]$ называется такая вектор-функция $x\in AC_\infty(\tilde{c},[0,T],\Omega)$, что

$$S(\dot{x},x)=D(\dot{x},x)\quad\forall t\in(0,\delta),\ x(0)=\tilde{c}. \tag{1.1}$$

Заметим, что система (1.1) представляет собой систему неявных дифференциальных уравнений. Без ограничений общности мы будем полагать выполненным следующее условие общего положения:

$$\forall j=\overline{1,n}\ \exists j\in\overline{1,n}:\ \ s_{1jk}\neq d_{1jk}.$$

Если это условие не выполнено, то система (1.1) содержит как дифференциальные, так и алгебраические уравнения, что значительно усложняет ее исследование. Однако, поскольку элементы матрицы предполагаются полученными эмпирическим путем из реальных статистических данных, мы можем добиться выполнения условия общего положения за счет повышения точности вычислений коэффициентов этих матриц.

2. Вспомогательные результаты

Условия существования положения в модели σ, т.е. решения системы (1.1), можно получить, используя результаты теории накрывающих отображений и точек совпадения. Перейдем к непосредственной формулировке необходимых определений и теорем. Итак, пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) – метрические пространства с метриками ρ_X и ρ_Y соответственно. Рассмотрим два отображения $\Psi, \Phi: X \to Y$.

Определение 2.1 ([15]). Точка $x \in X$ называется точкой совпадения отображений Ψ и Φ, если

$$\Psi(x) = \Phi(x).$$

Заметим, что решение системы (1.1) представляет собой точку совпадения отображений S и D. Существование точки совпадения для этих отображений можно гарантировать в том случае, если Φ удовлетворяет условию Липшица, а отображение Ψ является α-накрывающим. Сформулируем соответствующее определение. Через $B_X(x,r)$ обозначим шар в пространстве X с центром в точке x радиуса r и аналогично обозначим $B_Y(y,r)$.

Определение 2.2 ([15]). Пусть $\alpha > 0$. Отображение Ψ называется α-накрывающим, если

$$\Psi\big(B_X(x,r)\big) \supseteq B_Y(\Psi(x), \alpha r), \qquad \forall x \in X, r > 0.$$

Точную верхнюю грань всех таких $\alpha > 0$, что Ψ является α-накрывающим, обозначим через $cov\,\Psi$.

Наряду с обычным накрыванием рассмотрим локальный вариант накрывания – накрывание на множествах.

Определение 2.3 ([16]). Пусть $\alpha > 0$. Отображение Ψ называется α-накрывающим относительно множеств $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$, если $\forall x \in U$ и $r > 0$ таких, что $B_X(x,r) \subseteq U$ выполнено

$$\Psi\big(B_X(x,r)\big) \supseteq B_Y(\Psi(x), \alpha r) \cap V.$$

Если $V = X$, то отображение Ψ называется α-накрывающим на U. Точную верхнюю грань всех таких α, что отображение Ψ является α-накрывающим на U, обозначим через $\mathrm{cov}(\Psi|U)$.

Наконец, нам потребуется определение накрывающего отображения в точке.

Определение 2.4 ([16]). Пусть $\alpha > 0$. Отображение Ψ называется α-накрывающим в точке $x \in \mathrm{int}\,U$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta \in (0, \varepsilon)$ такое, что $B_X(x,\delta) \subset U$ и

$$\Psi\big(B_X(x,\delta)\big) \supseteq B_Y(\Psi(x), \alpha\delta).$$

Точную верхнюю грань всех таких α, что отображение Ψ является α-накрывающим в точке $x \in X$, обозначим через $\mathrm{cov}(\Psi|x)$.

Легко заметить, что если отображение Ψ является α-накрывающим, то оно является α-накрывающим относительно множеств U, V для любых $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ и α-накрывающим в любой точке $x \in X$. Напомним несколько известных результатов.

Если отображение $\Psi: X \to Y$ строго дифференцируемо в точке $x_0 \in X$, то имеет место неравенство (см. [11])

$$\mathrm{cov}(\Psi|x_0) = \mathrm{cov}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}(x_0)\right). \tag{2.1}$$

Если множество $U \subset X$ является замкнутым шаром ненулевого радиуса, то имеет место неравенство (см. [16])

$$\mathrm{cov}(\Psi|U) = \inf_{x \in \mathrm{int}\,U} \mathrm{cov}(\Psi|x). \tag{2.2}$$

Наряду с обычным накрыванием нам понадобится определение условно накрывающего отображения.

Определение 2.5 [17]. Пусть $\alpha > 0$. Отображение Ψ называется условно α-накрывающим относительно множеств $U \subseteq X$ и $V \subseteq Y$, если оно является α-накрывающим относительно множеств U и $V \cap \Psi(U)$.

Заметим, что если отображение Ψ является α-накрывающим, то оно, очевидно, является условно α-накрывающим. То же справедливо и для других видов накрывания. В частности, если отображение Ψ является α-накрывающим на $U \subset X$, то оно является условно α-накрывающим на этом же множестве (и на любом его подмножестве). Это соображение использовано для получения условий существования положения равновесия в модели σ.

Следующий результат позволяет получить условия существования положения равновесия для модели, описанной в предыдущем разделе.

Теорема 2.1 ([17]). Пусть заданы: отображение $\Upsilon: X \times X \to Y$, положительные числа α, R_1, R_2, число $\beta \in [0, \alpha)$ и точка $u_0 \in X$. Положим

$$R_{\min} = \min\{R_1, R_2\}, w_0 = \Upsilon(u_0, u_0)$$

и

$$r(y) = (\alpha - \beta)^{-1}\rho_Y(y, w_0), \qquad U_0(y) = B_X\big(u_0, r(y)\big)$$

для $y \in Y$.

Предположим, что при любом $x_2 \in U = B_X(u_0, R_1)$ отображение $\Upsilon(\cdot, x_2)$ является условно α-накрывающим относительно шаров U, $V(x_2) = B_y(\Upsilon(u_0, x_2), \alpha R_2)$, а при любом $x_1 \in U$ отображение $\Upsilon(x_1, \cdot)$ удовлетворяет на множестве U условию Липшица с константой β.

Пусть, далее, для всех $u \in U$, $\{u_i\} \subset U$, $y \in B_Y(w_0, \alpha R_2)$ из

$$\lim_{i\to\infty} u_i = u, \lim_{i\to\infty} \Upsilon(u_i, u) = y$$

следует $\Upsilon(u, u) = y$.

Тогда для любого $y \in Y$, для которого имеют место соотношения

$$\rho_Y(y, w_0) \le (\alpha - \beta)R_{\min}, \tag{2.3}$$

$$y \in \textstyle\bigcap_{x_2 \in U_0(y)} \Upsilon(U, x_2), \tag{2.4}$$

существует решение $x \in U$ уравнения

$$\Upsilon(x, x) = y,$$

удовлетворяющее оценке

$$\rho_X(x, u_0) \le r(y).$$

Эта теорема была использована в [18] для получения условий существования положения равновесия.

3. Условия существования положения равновесия в динамической модели рынка

Введем следующие обозначения:

$$\bar{\alpha}(\sigma) = \left\|S_1^T(S_1S_1^T)^{-1}\right\|; \tag{3.1}$$

$$\bar{\beta}(\sigma) = \max_{i=\overline{1,n}} \textstyle\sum_{j=1}^{n} \left|d_{1ij}\right| \frac{c_{2i} - c_{1i}}{2}; \tag{3.2}$$

$$\bar{\gamma}(\sigma) = \left|\textstyle\sum_{j=1}^{n}\big(d_{2ij} - s_{2ij}\big)\frac{c_{1i} + c_{2i}}{2} + (d_{3i} - s_{3i})\right|. \tag{3.3}$$

Следующая теорема, доказанная в [18] гарантирует существования положения равновесия.

Теорема 3.1 ([18]). Пусть параметры модели σ удовлетворяют следующим условиям:

1) $\bar{\gamma}(\sigma) < \bar{\alpha}(\sigma) - \bar{\beta}(\sigma)$;
2) $\det(S_1 + S_2) \neq 0$.

Тогда в модели σ существует положение равновесия $(\dot{x}, x) \in \Omega \times P$ такое, что

$$\max\left\{\max_{i=\overline{1,n}}|\dot{x}_i|, \max_{i=\overline{1,n}}\frac{|x_i|}{c_{2i} - c_{1i}}\right\} \le \left(\bar{\alpha}(\sigma) - \bar{\beta}(\sigma)\right)^{-1} \max_{i=\overline{1,n}}\left|\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(c_{1i} + c_{2i})\big(d_{2ij} - s_{2ij}\big) + (d_{3i} - s_{3i})\right|.$$

Идея доказательства теоремы строится на следующих соображениях. Мы хотим применить теорему 2.1. Рассмотрим отображение $\Upsilon: \Omega \times P \times \Omega \times P \to \mathbb{R}^n$, $\Upsilon(x_1, x_2) = S(x_1, x_2) - D(x_1, x_2)$. Из оценок (3.1) и (3.2) и условия 1) теоремы следует, что существуют α, β такие, что $\bar{\beta}(\sigma) < \beta < \alpha < \bar{\alpha}(\sigma)$, отображение $\Upsilon(\cdot, x_2)$ является α-накрывающим на $\Omega \times P$ при любом $x_2 \in \Omega \times P$, а отображение $\Upsilon(x_1, \cdot)$ удовлетворяет условию Липшица на $\Omega \times P$ при любом $x_1 \in \Omega \times P$. Далее, в силу замкнутости графика мы получаем условие непрерывности из теоремы 2.1. Условие 3) теоремы автоматически влечет (2.3). Условие (2.4) выполнено для точки $y = (S_2 - D_2 - E)^{-1}(S_3 - D_3)$, где E – единичная матрица. Применяя теорему 2.1 к модели σ мы получаем утверждение теоремы.

4. Заключение

Исследование системы неявных дифференциальных уравнений (2.1) даже в случае общего положения может быть достаточно затруднительным. В работе [18] наглядно показано, что даже при малых размерностях и сильных ограничениях на параметры модели получение условий существования положения равновесия в динамической модели представляет собой нетривиальную задачу. Однако, используя аппарат теории накрывающих отображений и точек совпадения мы можем получить необходимый результат без лишних трудностей. Более того, полученные результаты позволяют разработать алгоритм поиска положения равновесия в исследованной модели и провести численные эксперименты по анализу реальных статистических данных и определению положения равновесия для реальных рынков.

Литература

1. *Smith A.* An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations. – Chicago: University of Chicago Press, – 1152 p.
2. *Рикардо Д.* Начала политической экономии и налогового обложения. – М: Эксмо, 2016. – 1040 с.
3. *Милль Дж.* Основы политической экономии. – СпБ: Типография М.М. Стасюлевича, 1909. – 664 с.
4. *Say J.-B.* A Treatise on Political Economy; or the Production, Distribution, and Consumption of Wealth. – Philadelphia: Claxton, Remsen & Haffelfinger, 1880. – 428 p.
5. *Вальрас Л.* Элементы чистой политической экономии. – М.: Изограф, 2000. – 448 с.
6. *Bertrand J.* Theorie mathematique de la richesse sociale and of recherches sur les principles mathematiques de la theorie des richesses // Journal de Savants. – 1883. – Vol. 67. – P. 499–508.
7. *Кассель Г.* Основные идеи теоретической экономии. – Л.: Прибой, 1929. – 113 с.
8. *Arrow K. J., Debreu G.* Existence of an equilibrium for a competitive economy // Econometrica. – 1954. – Vol. 22, N 3. – P. 265–290.
9. *Самуэльсон П.* Основания экономического анализа. – СПб: Экономическая школа, 2002. – 604 с.
10. *Колемаев В.А.* Математическая экономика: учебник для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим специальностям. – 3-е стер. изд. – М.: ЮНИТИ, 2012. – 399 с.
11. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е., Павлова Н.Г.* Равновесные цены как точка совпадения двух отображений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2013. – Т. 53, № 2. – С. 225–237.
12. *Arutyunov A.V., Kotyukov A.M., Pavlova N.G.* Equilibrium in Market Models with Known Elasticities // Advances in Systems Science and Applications. – 2021. – Vol. 24, N 4. – P. 130–144.
13. *Kotyukov A.M., Pavlova N.G.* Nonuniqueness of Equilibrium in Closed Market Model // Advances in Systems Science and Applications. – 2023. – Vol. 23, N 2. – P. 184–194.
14. *Kotyukov A.M., Pavlova N.G.* Equilibrium in Dynamic Market Models with Known Elasticity // Journal of Mathematical Sciences. – 2023. – N 269. – P. 847–852.
15. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. РАН. – 2007. – Т. 416, № 2. – С. 151–155.
16. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications. – 2009. – Vol. 5, N 1. – P. 5–16.
17. *Avakov E.R., Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E.* Covering Mappings and Their Applications to Differential Equations Unsolved for the Derivative // Differential equations. – 2009. –Vol. 45, N 5. – P. 627–649.
18. *Kotyukov A.M., Pavlova N.G.* Equilibrium existence conditions in Evans–Samuelson–Walras market model // Journal of Mathematical Sciences. – (in press).