

УПРАВЛЕНИЕ В БАЗОВОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ КОЛЛЕКТИВНЫХ АКЦИЙ

Петров А.П.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
petrov.alexander.p@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача управления в базовой модели массовой кампании. Исходная модель имеет вид обыкновенного дифференциального уравнения для переменной, имеющей смысл явки. Сформулирована задача управления, применен принцип максимума Понтрягина, определено оптимальное управление.

Ключевые слова: оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, модель массовой кампании, antecedentes принятия решения.

Введение

Революции, протестные кампании и акции давно изучаются специалистами в области социальных наук. Известно даже такое понятие, как "поколения теорий революции" [1]. Математические модели все чаще применяются для анализа явлений данного класса [2-6]. Как правило эти модели нацелены на описание динамики процесса, выявление зависимости от параметров, определение роли характеристик социальной сети и т.д.

В настоящей работе рассматривается модель с управлением. Именно, предполагается, что власти имеют возможность манипулировать суровостью репрессий против протестующих. Переменные и параметры такого рода часто появляются в моделях. Так, в [2] одним из параметров модели является продолжительность тюремного заключения в наказание за участие в протесте.

Задача управления подразумевает следующий контекст. Суровость нормирована на единицу, но власти накладывают на себя самоограничение, не допуская превышения некоторой максимальной суровости s_m (в частности, она может быть равна единице). Целевой функционал отражает одновременное стремление уменьшить применение репрессий в интегральном по времени смысле, и в то же время - уменьшить численность протестующих на некоторый конкретный день.

При этом динамика переменных описывается в рамках подхода работ [6, 7]. В частности, это означает, что репрессии не только мотивируют потенциальных протестующих к неучастию, вызывая в них страх, но также мотивируют к участию, вызывая гнев. Таким образом, репрессии действуют одновременно в двух противоположных направлениях. Это породило большое количество исследований, посвященных как каждому из двух разнонаправленных влияний, так и их сопоставлению, с целью прояснить вопрос о том, при каких условиях они больше добавляют к мотиву участвовать, а при каких - к мотиву не участвовать. Тем самым, роль репрессий в подавлении и одновременном разжигании протеста на протяжении ряда лет является одной из самых крупных тем в области исследований политического протеста (см., напр., [8-13]). Так, уже в 1987 году в [11] эмпирически показывалось, что чем сильнее репрессии, тем слабее протест. Но многочисленные поздние исследования, такие, как [12], показывают противоположное. И еще в 1990 в работе [13] демонстрировалось, что влияние неоднозначное. Именно в рамках представления об этой неоднозначности развивается подход, на который опирается динамическая модель настоящей работы.

Для сравнения заметим, что практически все прочие факторы влияют лишь в одну сторону. Например, наличие успешных революций в соседних странах, расколы в обществе, расколы в элите, высокий уровень преступности и т.д. способствуют разжиганию протеста, не создавая противоположно направленного мотива.

Итак, математическая формулировка задачи содержит динамическую модель (в целом, известную ранее), в которую введено управление. К ней применяется принцип максимума Понтрягина и строится оптимальное управление.

Заметим, что задачи выбора стратегии репрессий неоднократно ставилась в литературе. Так, в [14] рассматривается серия игр в развернутой форме (игра с полной информацией, с неполной информацией, с неполной информацией и угрозой, исходящей от "третьей стороны"), в которой оппозиция и правительство поочередно принимают решения (протестовать или нет, репрессировать или нет, эскалация или уступка). Заметим, что указанная работа имеет весьма умозрительный характер. Задача о выборе между насильственными и ненасильственными репрессиями рассматривается методами агентно-ориентированного моделирования, основанного на эмпирическом материале, рассматривается в [15].

Одно из основных ограничений настоящей работы состоит в том, что сообщество протестующих рассматривается "в целом", в смысле того, что не рассматривается сетевая структура, при том, что сетевые аспекты могут иметь значимую роль в распространении настроений в обществе [16-19]. Также не рассматриваются вопросы содержания протеста, такие, как характер события-триггера. Соответственно, не используются методы [20, 21] анализа протестных сообщений и т.д.

Далее, в разделе 1 представлена динамическая модель, в разделе 2 формализуется задача управления, раздел 3 посвящен ее решению. Раздел 4 является заключительным и резюмирует полученные выводы.

1. Модель

Модель развивает подход SIMCA (Social Identity Model of Collective Action, [22]), в соответствии с которым мотив индивида к участию в акции формируется через посредство трех психологических antecedентов: гнева (или чувства справедливости), веры в успех и протестной идентичности индивида.

Вслед за работами [6, 7] положим, что гнев $a(t)$ имеет, вообще говоря, две причины, а выражение для него - два слагаемых: он возникает ввиду некоторого важного события, которое послужило триггером протеста (например, оглашение оспариваемых результатов выборов) и репрессии в ходе самой кампании:

$$a(t) = \frac{a_0 + s(t)}{2}.$$

Здесь a_0 - гнев ввиду события -триггера; $s(t)$ - суровость репрессий. Таким образом, модель опирается на положение о том, что чем более суровыми являются репрессии, тем больший гнев они вызывают. Нормировка переменных такова, что $0 \leq a_0 \leq 1$; $0 \leq s(t) \leq 1$. Таким образом, $0 \leq a \leq 1$.

Вера в успех b зависит от численности участников, в качестве конкретной спецификации примем

$$b(t) = P(t).$$

Здесь $P(t)$ - численность участников акции в момент t . При этом, $0 \leq P(t) \leq 1$.

Протестную идентичность d положим постоянной; $0 \leq d \leq 1$.

Также положим, что указанные три психологических antecedента участвуют в формировании мотива к участию аддитивно:

$$M_{action}(t) = \frac{a(t)+P(t)+d(t)}{3} = \frac{a(t)+s(t)}{6} + \frac{P(t)}{3} + \frac{d}{3}. \quad (1)$$

Коэффициенты здесь введены так, чтобы три antecedента учитывались в равной мере, и чтобы максимальное значение мотива было равно единице

Мотив к неучастию зависит от суровости репрессий:

$$M_{inaction}(t) = s(t). \quad (2)$$

Помимо мотивов, на решение индивида об участии в акции, влияет также его установка φ , которая выражает его долгосрочную предрасположенность к такого рода активности. Установка является постоянной во времени величиной, но отличается от индивида к индивиду. Положим, что распределение установки между индивидами является равномерным:

$$n(\varphi) = \begin{cases} 1, & -1 \leq \varphi \leq 0, \\ 0, & otherwise. \end{cases} \quad (3)$$

Принятие решения индивидом описывается следующий образом. В момент t индивид участвует в акции, если и только если

$$\varphi + \psi(t) > 0. \quad (4)$$

Здесь функция $\psi(t)$ определяется мотивами к участию и к неучастию так, что

$$\frac{d\psi}{dt} = M_{action}(t) - M_{inaction}(t) - \psi(t). \quad (5)$$

В соответствии с (4), численность протестующих имеет вид

$$P(t) = \int_{-\psi(t)}^{\infty} n(\varphi) d\varphi. \quad (6)$$

С учетом того, что распределение установок является равномерным, имеем

$$P(t) = \begin{cases} 0, & \psi(t) \leq 0, \\ \psi(t), & 0 \leq \psi(t) \leq 1, \\ 1, & \psi(t) \geq 1. \end{cases} \quad (7)$$

Таким образом, в области $0 \leq \psi(t) \leq 1$ имеем:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{a_0+2d}{6} - \frac{5s}{6} - \frac{2\psi}{3}. \quad (8)$$

Начальное условие соответствует тому, что кампания начинается "с нуля":

$$\psi(0) = 0. \quad (9)$$

2. Формализация задачи оптимального управления

Будем рассматривать протестную кампанию на интервале $(0;T)$, где T - экзогенно заданный момент времени. При этом, суровость репрессий принимается в качестве управления и имеет ограничение

$$0 \leq s \leq s_m, \quad (10)$$

где $s_m \leq 1$ - максимально возможная суровость репрессий, которую власти могут себе позволить.

Целевой функционал отражает стремление властей минимизировать численность протестующих в момент времени T при минимизации агрегированных по времени репрессий:

$$J = -\frac{k}{2} \int_0^T s^2 dt - \psi(T) \rightarrow \max, \quad (11)$$

где параметр $k > 0$ описывает значимость политических издержек, которые несет власть в связи с репрессиями, по сравнению с издержками, которые она несет в связи с высокой протестной явкой.

3. Решение задачи оптимального управления

Гамильтониан имеет вид

$$H(\psi, p) = p \left[\frac{a_0+2d}{6} - \frac{5s}{6} - \frac{2\psi}{3} \right] - \frac{ks^2}{2}. \quad (12)$$

Имеем для сопряженной переменной:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{2p}{3}, \quad p(T) = -1. \quad (13)$$

Отсюда получаем

$$p(t) = -\exp[2(t-T)/3]. \quad (14)$$

Ближайшая цель состоит в том, чтобы максимизировать гамильтониан по управлению. Имеем

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{5p}{6} - ks. \quad (15)$$

Эта производная обращается в ноль при

$$s = -\frac{5p}{6k}. \quad (16)$$

С учетом ограничения $0 \leq s \leq s_m$ получаем, что оптимальное управление имеет вид:

$$s = \begin{cases} \frac{5\exp[2(t-T)/3]}{6k}, & \frac{5\exp[2(t-T)/3]}{6k} \leq s_m \\ s_m, & \frac{5\exp[2(t-T)/3]}{6k} > s_m \end{cases} \quad (17)$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда оптимальное управление - это экспоненциальная функция, постоянная функция и составная функция.

Случай 1. Пусть для любого t из $[0;T]$ выполняется условие $\frac{5\exp[2(t-T)/3]}{6k} \leq s_m$, т.е. $5\exp[2(t-T)/3] \leq 6ks_m$. Поскольку экспонента является возрастающей, то данное неравенство равносильно неравенству

$$5 \leq 6ks_m. \quad (18)$$

При выполнении этого условия оптимальное управление имеет вид

$$s^* = \frac{5\exp[2(t-T)/3]}{6k}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (19)$$

Подставляя это оптимальное управление в задачу Коши для полного мотива, получаем:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{a_0+2d}{6} - \frac{25\exp[2(t-T)/3]}{36k} - \frac{2\psi}{3}, \quad \psi(0) = 0. \quad (20)$$

Ее решение имеет вид

$$\psi(t) = \frac{a_0+2d}{4}(1 - \exp[-2t/3]) + \frac{25}{48k}(\exp[-2(t+T)/3] - \exp[-2(t-T)/3]). \quad (21)$$

Случай 2. Пусть для любого t из $[0;T]$ выполняется условие $\frac{5\exp[2(t-T)/3]}{6k} \geq s_m$, т.е. $5\exp[2(t-T)/3] \geq 6ks_m$. Поскольку экспонента является возрастающей, то данное неравенство равносильно неравенству

$$5\exp[-2T/3] > 6ks_m. \quad (22)$$

При выполнении этого условия оптимальное управление имеет вид

$$s^* = s_m, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (23)$$

Подставляя это оптимальное управление в задачу Коши для полного мотива, получаем:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{a_0+2d-5s_m}{6} - \frac{2\psi}{3}, \quad \psi(0) = 0. \quad (24)$$

Ее решение имеет вид

$$\psi(t) = \frac{a_0+2d-5s_m}{4}(1 - \exp[-2t/3]). \quad (25)$$

Случай 3. Пусть теперь

$$5\exp[-2T/3] < 6ks_m < 5. \quad (26)$$

Тогда в соответствии с (17), оптимальное управление является составным. Именно, существует

$$t^* = T + \frac{3}{2} \ln \frac{6ks_m}{5} \quad (27)$$

такое, что

$$s^* = \begin{cases} \frac{5\exp[2(t-T)/3]}{6k}, & 0 \leq t \leq t^*, \\ s_m, & t^* \leq t \leq T. \end{cases} \quad (28)$$

Заметим, что неравенства (26) обеспечивают, что $0 < t^* < T$.

4. Заключение

В предыдущем разделе получено, что оптимальное управление является, в зависимости от параметров, либо экспоненциальной функцией времени, которая при любом t имеет значения меньше, чем максимально допустимый уровень s_m , либо является максимально допустимым, либо составным. При этом, в любом случае оптимальное управление является неубывающей функцией времени.

Проанализируем неравенство (22), чтобы выявить факторы, способствующие тому, что оптимальный уровень является максимально допустимым? В первую очередь, низкое значение самого максимально допустимого уровня. Второе - малое значение параметра k , т.е. низкая значимость репрессий в целевом функционале. Это - интуитивно понятные, ожидаемые выводы.

Информативным является результат в части управления, когда он не является всегда максимально допустимым. Каким должно быть направление динамики суровости? Как влияет на оптимальную стратегию продолжительность кампании? Полученное оптимальное управление состоит в том, что репрессии должны начинаться со слабой суровости, экспоненциально повышаться, и если по достижении максимального уровня кампания не закончилась, то после этого момента оставаться на максимальном уровне. Подчеркнем, что оптимальная стратегия имеет такой вид, если параметр k не слишком мал, т.е. для властей имеет значимый вес политическая стоимость репрессий.

Литература

1. *Goldstone J.A.* Toward a fourth generation of revolutionary theory // *Annual review of political science*. - 2001. - Vol. 4, N 1. - P. 139-187.
2. *Epstein J.M.* Modeling Civil Violence: An Agent-based Computational Approach // *PNAS*. - 2002. - Vol. 99, N 3. - P. 7243–7250. doi: 10.1073/pnas.092080199.
3. *Chenoweth E., Hocking A., Marks Z.* A dynamic model of nonviolent resistance strategy // *PLoS ONE*. - 2022. - Vol. 17, N 7. - e0269976.
4. *Moro A.* Understanding the Dynamics of Violent Political Revolutions in an Agent-Based Framework // *PLoS ONE*. - 2016. - Vol. 11, N 4. - e0154175. doi: 10.1371/journal.pone.0154175.
5. *Siegel D.* When does repression work? Collective action and social networks // *Journal of Politics*. - 2011 - Vol. 73, N 4. - P. 993–1010. doi: 10.1017/S0022381611000727.
6. *Petrov A., Akhremenko A., Zheglov S.* Dual Identity in Repressive Contexts: An Agent-Based Model of Protest Dynamics // *Social Science Computer Review*. - 2023. - Vol. 41, N 6. - pp. 2249-2273. doi: 10.1177/08944393231159953.
7. *Akhremenko A., Petrov A.* Modeling the Protest-Repression Nexus // *Proceedings of the Conference on Modeling and Analysis of Complex Systems and Processes 2020 (MACSPro 2020)*. - 2020. - Vol. 2795, P. 1-11. CEUR Workshop Proceedings.
8. *Ayanian A., Tausch N.* How risk perception shapes collective action intentions in repressive contexts: A study of Egyptian activists during the 2013 post-coup uprising // *British journal of social psychology*. - 2016. - Vol. 55, N 4. - P. 700-721. doi: 10.1111/bjso.12164.
9. *Siegel D.* Social Networks and Collective Action // *American Journal of Political Science*. - 2009. - Vol. 53, N 1, P. 122–138. doi: 10.1111/j.1540-5907.2008.00361.x.
10. *Steinert-Threlkeld S., Steinert-Threlkeld Z.* How social networks affect the repression-dissent puzzle // *PLoS ONE*. - 2021. - Vol. 16, N 5, e0250784. doi: 10.1371/journal.pone.0250784.
11. *Lichbach M.* Deterrence or Escalation? The Puzzle of Aggregate Studies of Repression and Dissent // *Journal of Conflict Resolution*. - 1987. - Vol. 31, N. 2. - P. 266—297. doi: 10.1177/0022002787031002003.
12. *Ritter E., Conrad C.* Preventing and Responding to Dissent: The Observational Challenges of Explaining Strategic Repression // *American Political Science Review*. - 2016. - Vol. 110, N 1. P. 85—99. doi: 10.1017/S0003055415000623.
13. *Opp K., Roehl W.* Repression, Micromobilization, and Political Protest // *Social Forces*. - 1990. - Vol. 69, N 2. - P. 521—547. doi: 10.2307/2579672.
14. *Pierskalla J.H.* Protest, deterrence, and escalation: The strategic calculus of government repression // *Journal of conflict Resolution*. - 2010. Vol. 54, N 1. - P. 117-145.
15. *Dornschneider-Elkink S., Edmonds B.* Does non-violent repression have stronger dampening effects than state violence? Insight from an emotion-based model of non-violent dissent // *Government and Opposition*. - 2024. - Vol. 59, N 1. - P. 249-271.
16. *Chkhartishvili A.G., Gubanov D.A., Novikov D.A.* Social Networks: Models of information influence, control and confrontation. - Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2019. – 158 p. DOI: 10.1007/978-3-030-05429-8.
17. *Chkhartishvili A.G., Gubanov D.A.* On the Concept of an Informational Community in a Social Network. // *Journal of Physics: Conference Series*. - 2021. - Vol. 1864, No. 1. - P. 012052.
18. *Kozitsin I.V.* Formal models of opinion formation and their application to real data: evidence from online social networks // *The Journal of Mathematical Sociology*. - 2022. - Vol. 46, N 2. - P. 120-147.
19. *Kozitsin I.V.* A general framework to link theory and empirics in opinion formation models // *Scientific reports*. - 2022. - Vol. 12. - P. 5543.
20. *Akhtyamova L., Alexandrov M., Cardiff J., Koshulko O.* Opinion Mining on Small and Noisy Samples of Health-related Texts // *Advances in Intelligent Systems and Computing III (Proc. of CSIT-2018)*. - Springer, AISC. 2019. - Vol. 871. - P. 1-12.
21. *Boldyreva A., Sobolevskiy O., Alexandrov M., Danilova V.* Creating collections of descriptors of events and processes based on Internet queries // *Proc. of 14-th Mexican Intern. Conf. on Artif. Intell. (MICAI-2016)*. - Springer Cham. LNAI. 2016. - Vol. 10061. - P. 303-314.
22. *Van Zomeren M., Postmes T., Spears R.* Toward an integrative social identity model of collective action: a quantitative research synthesis of three socio-psychological perspectives // *Psychological bulletin*. - 2008. - Vol. 134, N 4, - P. 504–535. doi: 10.1037/0033-2909.134.4.504.